

Introducción a la Investigación Operacional

Teoría y métodos aplicados
a la programación lineal.

Luis San Martín Riveros
Teniente Coronel



-----El Autor-----



Luis San Martín Riveros

El Teniente Coronel Luis San Martín Riveros nació en la comuna de Ñuñoa, Santiago de Chile. Egresó de la Escuela Militar como Oficial de Ejército, en diciembre del 2003, en el Arma de Infantería. Se desempeñó como Comandante de Sección Andina en el Regimiento Reforzado N.º 9 “Arauco” e Instructor de los Cursos Regulares de Montaña en la Escuela de Montaña, obteniendo las especialidades secundarias de Paracaidista Básico Militar, Instructor Militar de Montaña, Guerra Especial con mención en Liderazgo, Profesor Militar de Escuela en Táctica de Montaña y Traductor Militar en idioma Inglés e Italiano.

Posteriormente, se tituló como Ingeniero Politécnico Militar en Sistemas de Armas, con mención en Armamento, habiéndose desempeñado en la Dirección de Operaciones del Ejército, en el Regimiento Logístico N.º 5 “Magallanes” y en el Centro de Mantenimiento Industrial de FAMA E “Punta Arenas”, donde actualmente se encuentra destinado.

Posee el grado académico de Licenciado en Educación de la Universidad de Playa Ancha, Licenciado en Ciencias de la Ingeniería Militar de la Academia Politécnica Militar, Magister en Investigación Operacional de la Universidad de Edimburgo, Reino Unido, y Doctor en Ciencias de la Ingeniería en el área de Ingeniería Industrial y de Transporte de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Comité editorial

Coronel Alex Hellman Navarrete

Editora:

Sra. Denisse Olgún Arias

Diseño de portada:

Sr. Marcelo Gómez Román

ISBN (pendiente)

Editado en la Academia Politécnica Militar del Ejército de Chile

Primera edición 2024



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-
NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

**INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN
OPERACIONAL**

Teoría y métodos aplicados a la programación
lineal

Luis San Martín Riveros
Teniente Coronel

ACADEMIA POLITÉCNICA MILITAR

SANTIAGO, 2024

PRESENTACIÓN

La toma de decisiones informadas es un pilar esencial en diversas disciplinas, incluyendo la economía, la industria y la defensa. En este contexto, la programación lineal emerge como una herramienta matemática poderosa, capaz de optimizar recursos y soluciones dentro de un marco de restricciones complejas.

El presente ensayo, representa un esfuerzo por conectar los fundamentos teóricos de esta disciplina con aplicaciones prácticas que abordan problemas reales. Desde los conceptos algebraicos básicos hasta la implementación de metodologías avanzadas como el método gráfico, el análisis de sensibilidad y la dualidad, este trabajo ofrece una visión integral de la programación lineal aplicada.

La relevancia de esta publicación radica en su capacidad para servir como guía educativa tanto para estudiantes que recién se introducen al tema, como para profesionales que buscan profundizar su comprensión en esta área. En particular, el enfoque en contextos especializados como en el ámbito militar, donde la gestión eficiente de recursos es crítica, destaca su valor pedagógico y práctico.

Como Director de la Academia Politécnica Militar, me complace presentar esta obra, resultado del esfuerzo académico del autor, como un aporte significativo a la formación y al desarrollo de competencias en optimización y toma de decisiones complejas.

ALEX HELLMAN NAVARRETE

Coronel

Director de la Academia Politécnica Militar

Introducción a la investigación operacional

Teoría y métodos aplicados a la programación
lineal

Autor: Teniente Coronel Luis San Martín Riveros

*Este libro constituye la décima segunda entrega de la colección de ensayos de la Academia Politécnica Militar del Ejército de Chile.

ÍNDICE

ÍNDICE.....	5
INTRODUCCIÓN.....	9
1. CONCEPTOS DE OPTIMIZACIÓN	11
1.1. Conceptos algebraicos y geométricos.....	11
1.1.1. Sumatoria.....	11
1.1.2. Punto.....	12
1.1.3. Rayo	12
1.1.4. Combinación lineal	12
1.1.5. Línea	13
1.1.6. Combinación afín.....	13
1.1.7. Conjunto afín.....	14
1.1.8. Combinación convexa	14
1.1.9. Conjunto convexo	15
1.1.10. Función lineal.....	16
1.1.11. Función afín	16
1.1.12. Función convexa.....	17
1.2. Planos y espacios.....	18
1.2.1. Plano	19
1.2.2. Espacio.....	20
1.3. Poliedros.....	21
1.4. Problema general de optimización	23
1.5. Elementos de un PPL.....	26
1.6. Formas equivalentes de un PPL.....	27
1.6.1. Sentido de optimización	28
1.6.2. Sentido de las desigualdades.....	28
1.6.3. Forma estándar	29
1.6.4. Forma canónica	29
1.6.5. Transformación de igualdad en desigualdad.....	30
1.6.6. Variables de decisión libres	31
1.7. Función de Lagrange.....	32

1.8.	Algoritmos y complejidad computacional.....	33
1.9.	Metodología para formular un PPL	35
2.	MÉTODO GRÁFICO.....	37
2.1.	Procedimiento del método gráfico	37
2.2.	Caso aplicado del método gráfico	38
2.3.	Generalidades del método gráfico	44
3.	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	46
3.1.	Parámetros de la función objetivo.....	47
3.2.	Parámetros de las restricciones	51
3.2.1.	Coeficientes de proporcionalidad	51
3.2.2.	Coeficientes de disponibilidad de recursos	54
3.3.	Generalidades del análisis de sensibilidad.....	59
4.	DUALIDAD.....	61
4.1.	Regla de transformación dual.....	61
4.2.	Dualidad mediante los multiplicadores de Lagrange	64
4.2.1.	Derivación del problema dual.....	64
4.2.2.	Dualidad débil y fuerte.....	69
4.3.	Teorema de holguras complementarias (THC).....	75
4.3.1.	Formulación del THC	75
4.3.2.	Procedimiento del THC.....	77
4.3.3.	Aplicación del THC.....	78
4.4.	Relación entre dualidad y análisis de sensibilidad	80
4.5.	Interpretación económica de la dualidad	82
5.	MÉTODO SIMPLEX	85
5.1.	Simplex fase II	86
5.1.1.	Modelar el primal del PPL.....	88
5.1.2.	Transformar el PPL a la forma estándar	88
5.1.3.	Componer la tabla Simplex	88
5.1.4.	Identificar la columna pivote	90

5.1.5.	Determinar la fila pivote.....	91
5.1.6.	Identificar el elemento pivote.....	92
5.1.7.	Convertir columna pivote a identidad.....	93
5.1.8.	Condición de optimalidad.....	95
5.1.9.	Iteración 2 método Simplex fase II.....	96
5.1.10.	Consideraciones Simplex fase II	101
5.1.11.	Síntesis del método Simplex fase II.....	103
5.2.	Simplex fase I	104
5.2.1.	Método de la BIG-M	107
5.2.2.	Método de variables artificiales	114
5.3.	Simplex casos especiales.....	122
5.3.1.	Caso especial 1: soluciones múltiples.....	123
5.3.2.	Caso especial 2: solución degenerada.....	127
5.3.3.	Caso especial 3: problema no acotado	130
5.3.4.	Caso especial 4: problema no factible.....	135
5.4.	Método Simplex dual	139
5.4.1.	Procedimiento del método Simplex dual	139
5.5.	Método Simplex vectorial	145
5.5.1.	Composición vectorial de un PPL.....	145
5.5.2.	Método Simplex revisado.....	151
6.	MODELOS DE ASIGNACIÓN Y TRANSPORTE.....	162
6.1.	Problema de asignación	163
6.1.1.	Formulación del problema de asignación.....	165
6.1.2.	Ejemplo del problema de asignación.....	166
6.1.3.	Problema de asignación no balanceado	168
6.1.4.	Método húngaro (caso $m = n$)	170
6.1.5.	Método húngaro (caso $m \neq n$)	182
6.2.	Problema de transporte.....	184
6.2.1.	Formulación del problema de transporte	187
6.2.2.	Ejemplo del problema de transporte	188
6.3.	Método Simplex para los problemas de transporte.....	190
6.3.1.	Métodos aproximados (fase I)	191
6.3.2.	Método Simplex de transporte (fase II).....	203

6.4. Problema de transbordo	227
6.4.1. Formulación del problema de transbordo	228
6.4.2. Ejemplo del problema de transbordo	231
7. PROBLEMAS DE REDES.....	235
7.1. Elementos en los problemas de redes	235
7.1.1. Definiciones de redes	235
7.1.2. Representación gráfica de las redes.....	236
7.2. Tipos de problemas de redes	238
7.2.1. Problema de las rutas mínimas	238
7.2.2. Problema árbol mínimo de expansión máxima.....	248
7.2.3. Problema de flujo máximo	260
7.2.4. Problema de flujo máximo a costo mínimo.....	272
CONCLUSIONES	278
REFERENCIAS	279

INTRODUCCIÓN

Diariamente, personas, organizaciones, máquinas o cualquier tipo de entidad toman decisiones con respecto a acciones a seguir, a modo de cumplir un propósito. Dicho propósito, independiente de los matices que condicionen las decisiones, persiguen como fin último la obtención de un beneficio, tangible o no, para la entidad que adopte una decisión.

Las decisiones corresponden a la elección de una alternativa, en desmedro de otras, en función a un propósito u objetivo, tal como reducir el tiempo de viaje, incrementar las ganancias mensuales, cruzar lo más rápido posible la calle, etc. No obstante, para cada uno de esos objetivos existen limitantes o restricciones como la velocidad máxima de circulación en una carretera y la cantidad de vehículos en ella, la cantidad de días feriados y días no trabajables en un mes, el tipo de zapatos utilizado y la cantidad de bolsos que transporta una persona al cruzar la calle, respectivamente.

Por lo tanto, el proceso de adoptar una decisión, basado en un objetivo que beneficie a la mencionada entidad, sujeto a las restricciones o limitaciones que puedan existir, es la temática que aborda la Investigación Operacional, disciplina que está enfocada en abordar problemas productivos para facilitar la toma de decisiones. Una de las principales bases científicas que utiliza la Investigación Operacional es la Optimización matemática (o simplemente optimización), rama de las ciencias exactas que busca obtener la mejor solución, dado un criterio determinado, sujeto a limitaciones existentes.

En este contexto, el presente ensayo explora y expone los principales conceptos de la teoría y métodos de la Investigación Operacional, utilizando a la optimización como principal herramienta, con el propósito de brindar una guía balanceada entre teoría y práctica para un alumno que no conozca del tema en cuestión y que se enfrente

a un curso introductorio en la disciplina. En particular, el ensayo se enfocará en la aplicación de la programación lineal, un tipo específico de optimización, en la cual las variables son de tipo continuas y no negativas y las funciones de tipo lineal (afin).

La importancia de comprender y dominar los conceptos elementales de la Investigación Operacional radica en que la aplicación de la teoría y los métodos a problemas cotidianos de la vida real requiere de la comprensión holística del contexto del problema y de la estrategia a seguir, por lo que en ningún caso podrá existir una acción eficiente que contribuya a la mejora de la situación objetivo si no se comprende la herramienta que se está utilizando y la manera correcta en la cual se deba emplear.

El ensayo comienza con una serie de definiciones de base para dar marco teórico al contenido posterior. Luego, se exponen los fundamentos del método gráfico para la resolución de problemas de optimización de dos variables. En el siguiente capítulo se estudia el análisis de la sensibilidad como herramienta de evaluación de la solución, en una etapa de pos-optimalidad, para explorar lo ¿qué sucedería sí?, una vez obtenida la mejor decisión. A continuación, se explora la dualidad como una estrategia para analizar los problemas de optimización desde una perspectiva alternativa (matemáticamente hablando). El método Simplex es expuesto desde la teoría y mediante la aplicación de un método secuencial de resolución de problemas, siendo la herramienta más comúnmente empleada para problemas de programación lineal. Finalmente, en los últimos dos capítulos de este ensayo se estudian dos aplicaciones ampliamente utilizadas. En primer lugar, los problemas de asignación y de transporte y, posteriormente, algunos tipos de problemas de redes.

1. CONCEPTOS DE OPTIMIZACIÓN

Para la comprensión y aplicación de los métodos de programación lineal tratados en esta publicación, es necesario definir algunos conceptos, desde una perspectiva teórico-matemática, en la disciplina de optimización, a fin de dar marco a las aplicaciones posteriores.

Este capítulo inicia con algunas definiciones de conceptos algebraicos y geométricos, para luego continuar con la definición de planos y espacios, los que derivan a su vez en configurar poliedros, terminando con la formalización de un problema de optimización y, en particular, de programación lineal. Posteriormente, se presentan formas equivalentes de representar problemas de optimización, finalizando con aspectos teóricos de la formulación de los problemas a través de multiplicadores de Lagrange, los algoritmos y su complejidad y la metodología para la formulación de un problema de programación lineal.

1.1. Conceptos algebraicos y geométricos

Los conceptos algebraicos y geométricos que se definirán son: sumatoria, punto, rayo, combinación lineal, línea, combinación afin, conjunto afin, combinación convexa, conjunto convexo y funciones de ese tipo.

1.1.1. Sumatoria

Una sumatoria es una representación compacta de una suma de términos consecutivos, la que se representa por el símbolo Sigma Σ . Su aplicación requiere del empleo de un conjunto de elementos que numere o secuencia a los términos que se están sumando. Sea $a_i \forall i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ un término a numerado con el índice “ i ”, en el conjunto de elementos I . Entonces, la suma de dichos términos en el conjunto I es:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

1.1.2. Punto

Un punto es un objeto geométrico en el espacio. Un punto en dos o más dimensiones puede denominarse vector. Un punto en n -dimensiones se representa por sus coordenadas en cada dimensión de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

1.1.3. Rayo

Un rayo consiste en un punto de inicio u y todas las direcciones posibles d , representado por $\{x \in \mathbb{R}^n | x = u + \lambda d, \forall \lambda \geq 0\}$, donde λ corresponde a un ponderador en \mathbb{R} (Figura 1).

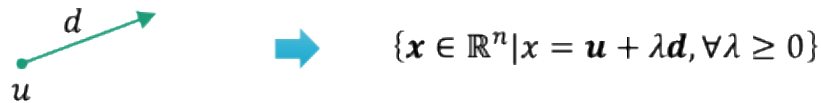


Figura 1.- Representación de un rayo (elaboración propia).

1.1.4. Combinación lineal

Para un vector $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$, cualquier punto y es una combinación lineal de ellos si y solo si se cumple que:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = \sum_i a_i x_i \quad \forall i: a_i \in \mathbb{R}$$

Desde un punto de vista vectorial, corresponde al “producto punto” entre dos vectores, pudiendo también representarse por:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$$

Cabe señalar que si a_i se restringe a ser no negativo ($\forall i: a_i \geq 0$), se obtiene una combinación cónica.

1.1.5. Línea

Considerando los elementos en el plano (\mathbb{R}^2), una línea se define como sigue: dado dos puntos $x_1 \neq x_2$, los puntos con la estructura

$$y = ax_1 + (1 - a)x_2, \quad a \in \mathbb{R}$$

forman la línea que pasa a través de x_1 y x_2 . Expresando el punto y como $y = x_2 + a(x_1 - x_2)$, este se puede interpretar como la suma del punto base x_2 (cuando $a = 0$) y la dirección $x_1 - x_2$ escalada por el parámetro a , es decir, cuánto se aleja desde x_2 hacia x_1 (Figura 2).

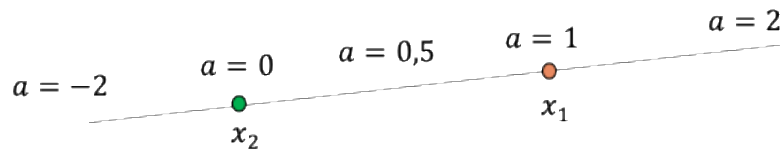


Figura 2.- Representación de una línea (elaboración propia).

Utilizando la definición de un rayo, una línea consiste en dos rayos con un punto de inicio a común y en opuestas direcciones d según la forma $\{x \in \mathbb{R}^n | x = a + \lambda d, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ (ver Figura 3).



Figura 3.- Representación de una línea a base de un rayo (elaboración propia).

1.1.6. Combinación afin

Para los vectores x_1, x_2, \dots, x_k cualquier punto y es una combinación afin de ellos si y solo si:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = \sum_i a_ix_i \quad \forall i: a_i \in \mathbb{R}, \sum_i a_i = 1$$

La única diferencia con la combinación lineal es que en la combinación afin incorpora la restricción, en la cual, la suma de los ponderadores a_i es igual a uno, independientemente de que tomen individualmente valores positivos, negativos o cero.

1.1.7. Conjunto afin

Un conjunto $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^n$ es afin si la línea que atraviesa por dos puntos distintos en \mathcal{C} pertenecen a dicho conjunto \mathcal{C} .

En \mathbb{R}^2 , se tiene que $y = ax_1 + (1 - a)x_2$, $a \in \mathbb{R}, a_1 + a_2 = 1$ (en este caso, $a_1 = a$ y $a_2 = 1 - a$), es un conjunto afin que contiene todas las combinaciones afines de sus puntos. Por lo tanto, una línea está contenida en un conjunto afin. Por ejemplo, la siguiente expresión representa con conjunto afin:

$$y = ax_1 + (1 - a)x_2 = 1,2x_1 + (1 - 1,2)x_2 = 1,2x_1 + (-0,2)x_2$$

1.1.8. Combinación convexa

Para los vectores x_1, x_2, \dots, x_k cualquier punto y es una combinación convexa de ellos si y solo si:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = \sum_i a_ix_i \quad \forall i: a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1$$

La diferencia con la combinación afín es que en la combinación convexa se incorpora la restricción que los ponderadores a_i sean no negativos.

1.1.9. Conjunto convexo

Por lo tanto, un conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ es convexo si contiene todas las combinaciones convexas de cualesquiera dos puntos contenidos en él.

En \mathbb{R}^2 , se tiene que $y = ax_1 + (1 - a)x_2$, $a \geq 0 \wedge a_1 + a_2 = 1$, es un conjunto convexo si el parámetro a se encuentra acotado entre 0 y 1, lo que significa que contiene el segmento línea entre x_1 y x_2 (ver Figura 4).

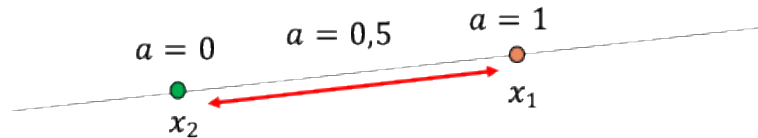


Figura 4.- Representación de una línea (elaboración propia).

En la Figura 5, se presentan ejemplos de conjuntos que son convexos y no convexos.

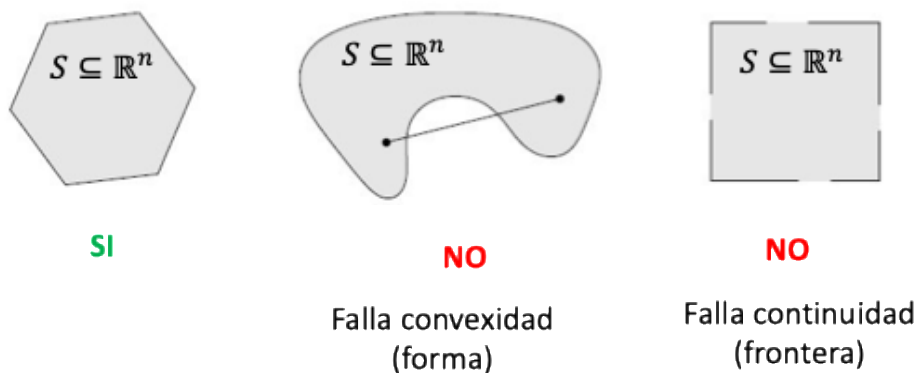


Figura 5.- Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos (elaboración propia).

Cabe señalar que la intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo, pero no la unión de dichos conjuntos (Figura 6).

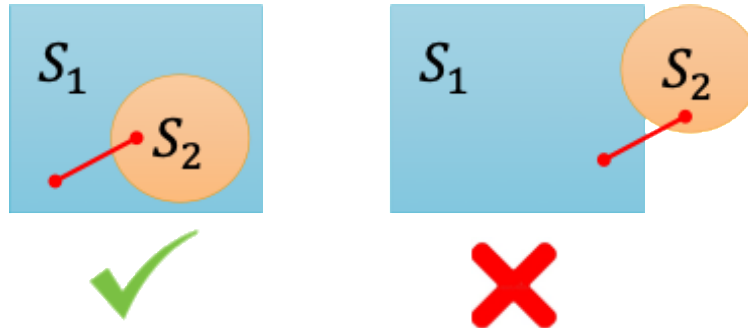


Figura 6.- Intersección y unión de conjuntos convexos (elaboración propia).

1.1.10. Función lineal

En álgebra lineal, una función lineal $f(x) = ax$ es aquella que cumple con las propiedades de transformación lineal:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = kf(x)$$

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x$ es lineal, debido a que proviene de una transformación lineal que cumple con las dos propiedades anteriores:

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y$$

$$f(kx) = 2(kx) = k2x$$

1.1.11. Función afin

En álgebra lineal, una función del tipo $f(x) = ax + b$ no es una transformación lineal, pues no cumple con las propiedades de linealidad.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \rightarrow a(x + y) + b \neq ax + b + ay + b$$

$$f(kx) = kf(x) \rightarrow a(kx) + b \neq k(ax + b)$$

A este tipo de funciones se les denomina “función afín”. Entonces, una restricción que tiene la forma $f(x) = ax$ es lineal y cruza el origen de un eje de coordenadas. En cambio, una restricción con la función $f(x) = ax + b$ es afín y cruza los ejes de coordenadas en un punto distinto al origen.

En la Figura 7 se muestran dos ejemplos de funciones. Aquella de color verde es una función afín, ya que la constante $b \neq 0$, contrariamente a aquella función lineal, de color morado, cuya constante $b = 0$.

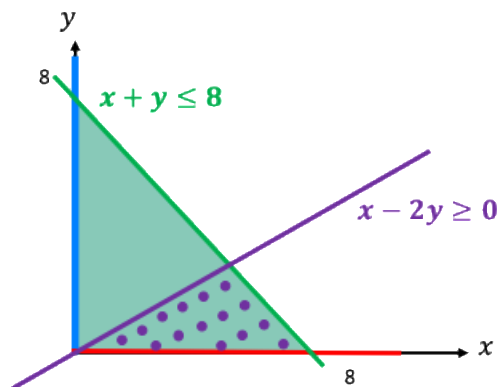


Figura 7.- Función lineal y afín (elaboración propia).

1.1.12. Función convexa

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si el **dom** f es un conjunto convexo y si para todo $x, y \in \mathbf{dom} f$, y para λ con $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Para una función afín, la desigualdad anterior se comporta siempre como igualdad, entonces todas las funciones afines (y lineales) son convexas y cóncavas simultáneamente. Igualmente, cualquier función que es convexa y cóncava es afín.

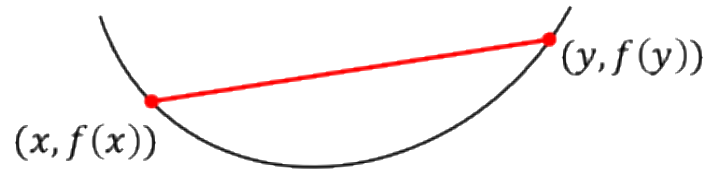


Figura 8.- Función cuadrática y convexidad (elaboración propia).

En la Figura 8 se muestra una función cuadrática de tipo convexa $f(*)$, en la cual, la función evaluada en un punto cualquiera del dominio ubicado entre los puntos $[x, y]$ es menor o igual a la evaluación de la función ponderada en ambos puntos, de forma separada.

1.2. Planos y espacios

Las definiciones presentadas con anterioridad permiten dar contexto y fundamento a los elementos de carácter geométricos que son presentados en esta sección.

Los planos, construidos a base de una generalización de la línea, permite subdividir los espacios en $\mathbb{R}^i \forall i = 2, 3, \dots, n$ que es el lugar en cual se encuentran las soluciones a los problemas de programación lineal a ser resueltos.

Los planos y espacios constituyen elementos fundamentales para la formulación, análisis y resolución de problemas de optimización. Ambos elementos son tratados detalladamente a continuación.

1.2.1. Plano

En \mathbb{R}^2 , una línea representa a un plano, es decir, la combinación lineal de $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Cuando la línea pasa por el origen, $b = 0$. En \mathbb{R}^3 , la línea se denomina plano, definiéndose algebraicamente por $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ (Figura 9), cruzando igualmente por el origen cuando $b = 0$.

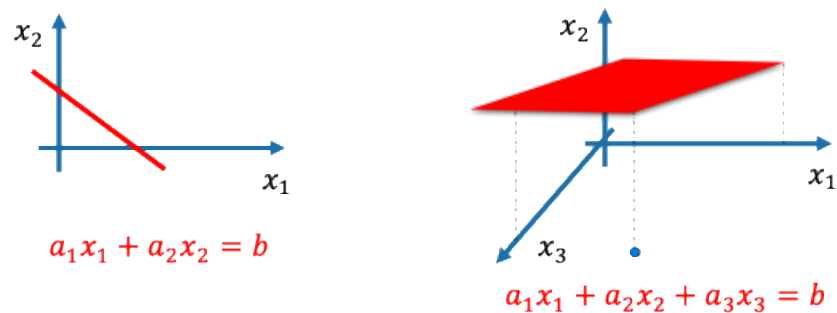


Figura 9.- Línea y plano (elaboración propia).

Un plano en \mathbb{R}^n es el conjunto de soluciones de una ecuación lineal en n variables, representado por la expresión:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a^T x = b$$

El plano en más de tres dimensiones se denomina hiperplano, el cual, es un conjunto que tiene la forma $\{x | a^T x = b\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, y $b \in \mathbb{R}$.

Un hiperplano puede ser entendido como el producto escalar (o producto punto) de un conjunto de puntos con un vector de dirección a . Alternativamente, también se entiende como un hiperplano con un vector normal a . La constante b determina la distancia que existe hacia el origen (por esa constante, se considera afin).

Esta interpretación geométrica puede ser conceptualizada como un hiperplano de la forma $\{x|a^T(x - x_0) = 0\}$, donde x_0 es cualquier punto en el hiperplano (que satisface $a^T x_0 = b$). Así, el hiperplano puede representarse como:

$$\{x|a^T(x - x_0) = 0\} = x_0 + a^\perp$$

Donde a^\perp es el complemento ortogonal de a (conjunto de todos los vectores ortogonales de: $a^\perp = \{v|a^T v = 0\}$).

1.2.2. Espacio

En \mathbb{R}^2 , una recta corta la superficie del plano cardinal en dos partes, configurando dos medios planos. En \mathbb{R}^3 , sucede algo similar con el espacio tridimensional, en el cual, un plano divide dicho espacio en dos medios espacios.

Consecuentemente, un hiperplano divide \mathbb{R}^n en dos medios espacios de dimensión n . Un medio espacio cerrado es un conjunto de la forma $\{x|a^T x \leq b\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, y $b \in \mathbb{R}$, siendo la solución no trivial de una desigualdad lineal. Los medios espacios son convexos, pero no afines.

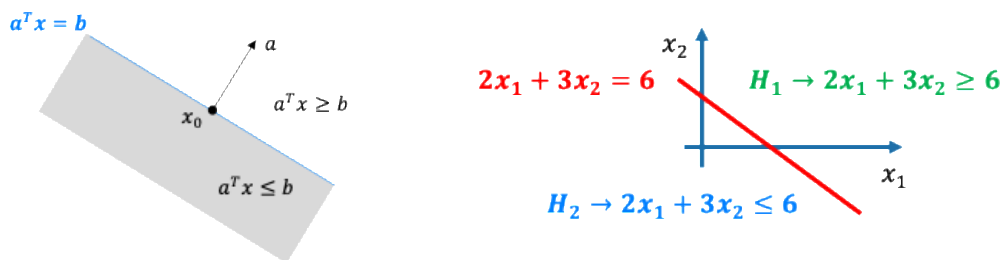


Figura 10.- Ejemplos de plano y medio espacio (elaboración propia).

En la imagen izquierda de la Figura 10 se presenta una recta de la forma $a^T x = b$ que divide el plano en dos medios planos de

la forma $a^T x \leq b$ y $a^T x \geq b$. En la imagen derecha, se muestra un ejemplo algebraico de la relación entre una recta y el plano.

Basado en la definición de que un medio espacio es convexo, la intersección de ambos medios espacios, al ser convexos y en consideración a las propiedades de los espacios convexos, debe ser convexo. En este caso, la intersección de los medios espacios $a^T x \leq b$ y $a^T x \geq b$ es la recta $a^T x = b$ la cual es convexa.

1.3. Poliedros

Un poliedro es definido como el conjunto solución de un número finito de desigualdades e igualdades lineales:

$$\mathcal{P} = \{x \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}$$

Por lo tanto, un poliedro se conforma a partir de la intersección de un conjunto finito de hiperplanos. Los poliedros son conjuntos convexos.

Un poliedro es una región del espacio delimitada por la intersección de un número finito de hiperplanos cortantes. Igualmente, se puede entender por la intersección del mismo número de medios espacios (Figura 11).

La importancia del poliedro en optimización y, particularmente, en programación lineal es debido a que en esta figura geométrica están contenidas las posibles soluciones de un problema de programación línea, definiendo el espacio de soluciones factibles.

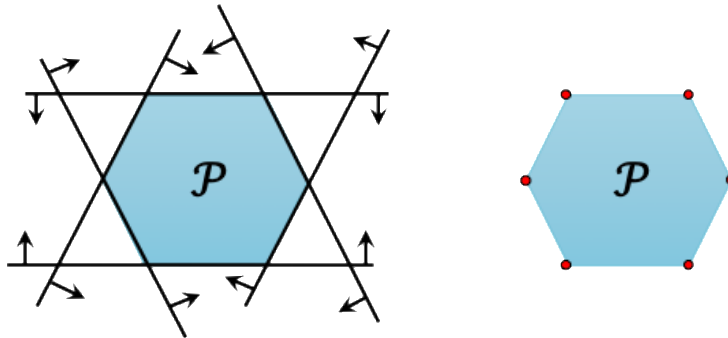


Figura 11.- Poliedro e hiperplanos (elaboración propia).

Matemáticamente, la definición de un poliedro como región de soluciones factibles cobra sentido al representar algebraicamente el poliedro de la Figura 11 a través de la siguiente expresión:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T x_1 \leq b_1, \mathbf{a}^T x_2 \leq b_2, \dots, \mathbf{a}^T x_m \leq b_m\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x \leq \mathbf{b}\}$$

Ahora bien, un punto x en un poliedro P es un punto extremo si y solo si el punto x NO ES UNA COMBINACIÓN CONVEXA de otros dos puntos diferentes de P . La Figura 12 muestra un poliedro y las posibles combinaciones convexas en el trazo \overline{yz} .

Particularmente, el punto x es un punto extremo porque ninguno no es un punto de una combinación de otros dos puntos del poliedro.

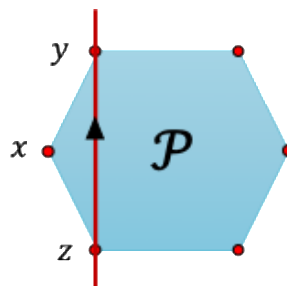


Figura 12.- Combinación convexa en un poliedro (elaboración propia).

Formalmente, dicha aseveración se define como $\nexists y, z \in P \mid y \neq x, z \neq x \text{ con } x = \lambda y + (1 - \lambda)z, \forall \lambda \in [0,1]$, es decir, a partir de los puntos extremos y, z no es posible componer el punto x , siendo este último también un punto extremo. La combinación convexa entre dos puntos adyacentes solo genera infinitos puntos intermedios en el trazo que los une, ninguno de ellos extremos.

1.4. Problema general de optimización

La optimización matemática busca modelar y resolver problemas asociados a algún tipo de sistema, natural o humano, en el cual se requiere obtener un mínimo o un máximo rendimiento de este. En consecuencia, un problema de optimización se representa a través de los siguientes elementos componentes:

- **Parámetros:** son las constantes del problema, es decir, los datos disponibles con los cuales se alimenta la formulación matemática. Pueden ser de naturaleza determinística (se conoce con certeza) o no determinísticos (existe incertidumbre en su valor real). Por ejemplo, el parámetro c podría corresponder al costo que tiene transportar un ciclo logístico entre un punto y otro.
- **Conjuntos:** son las agrupaciones de elementos, en cada dimensión que tenga el problema, sobre las cuales se configura la estructura de la formulación. Por ejemplo, en un sistema cliente-proveedor, se puede definir el conjunto de clientes, desde 1 hasta m y el conjunto de proveedores, desde 1 hasta n , siendo m y n el máximo número de clientes y proveedores, respectivamente.

- **VARIABLES DE DECISIÓN:** corresponden a las decisiones o políticas que propone el modelo, en conformidad a la estructura del problema de optimización, una vez resuelto. Por ejemplo, una variable puede ser x_{ij} definida como la cantidad de toneladas de pertrechos que el cliente i adquiere del proveedor j y deben ser trasladados entre ellos.

- **Modelo de optimización:** es la formulación matemática del sistema que se desea representar y resolver, con el propósito de adoptar una decisión. Está compuesto por los siguientes elementos (Figura 13):
 - *Función objetivo:* corresponde al componente que representa matemáticamente la situación a ser “mejorada”, entendiéndose esto último como el objeto de la modelación matemática del sistema. Debe tener un sentido, el que puede ser de minimización o maximización. La función lineal que la representa tiene la forma $z = c^T x$, en donde c se denomina coeficiente de costo o beneficio.

 - *Restricciones:* son los elementos del sistema que limitan conseguir el “mejor” resultado deseado, es decir, que dan marco a las decisiones que realmente el modelo pueda proponer, pudiendo ser de carácter lineales o no lineales. Las restricciones pueden ser: a) estructurales del problema y; b) que definen el espacio de solución (variables de decisión). Igualmente, pueden ser representadas a través de una igualdad o desigualdad. La función afín que la representa tiene la forma $a^T x = b$, en donde a se denomina coeficiente de proporcionalidad y b se coeficiente de disponibilidad de recursos.

Un problema de programación lineal (PPL) es un tipo de problema de optimización, en el cual, la función objetivo y las restricciones son de tipo lineal.

En el caso de la función objetivo, corresponde a una función convexa y las restricciones a funciones afines, en el caso de tener la forma $a^T x \gtrless b$.

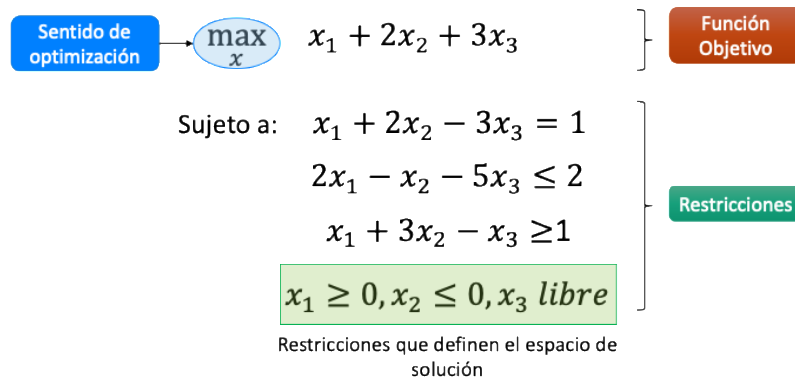


Figura 13.- Estructura de un problema de optimización (elaboración propia).

Los PPL tratados en esta publicación estarán restringidos al cuadrante positivo en \mathbb{R}^2 y al octante positivo en \mathbb{R}^3 , es decir, todas las variables de decisión continuas y no negativas en dos y tres dimensiones, respectivamente.

La representación compacta (también denominada canónica) de un PPL está dada por la expresión que se presenta en la Figura 14:

$$\begin{array}{ll}
 \max_x c^T x & \min_x c^T x \\
 \text{Sujeto a: } Ax \leq b & \text{Sujeto a: } Ax \geq b \\
 x \in \mathbb{R}_+^n & x \in \mathbb{R}_+^n
 \end{array}$$

Figura 14.- Representación compacta de un PPL (elaboración propia).

Nótese que la Figura 13 y la Figura 14 difieren en que la primera presenta un ejemplo de variables de decisión en todas las direcciones posibles, en cambio, la segunda solo muestra a las variables de decisión (restricciones) en el cuadrante u octante positivo.

1.5. Elementos de un PPL

Dado un PPL representado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & x_1 \leq 180 \\ & 2x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se definen los siguientes conceptos para describir un PPL genérico (ver Figura 15):

- Punto óptimo (x^*): valor de variables de decisión cuando se alcanzó el mejor (Máx/Min) valor.
- Valor óptimo: valor de la función objetivo evaluada en el punto óptimo x^* .
- Solución óptima: constituye la unión del punto óptimo con el valor óptimo, lo que permite caracterizar completamente un PPL.
- Punto extremo: es la intersección entre dos o más restricciones y que definen uno de los vértices del poliedro.
- Restricción activa: son aquellas que, mediante su intersección, definen el punto óptimo (que generalmente es también un punto extremo).
- Restricciones inactivas: son aquellas que no participan en la definición del punto óptimo (definen puntos extremos).

- Restricción redundante: son aquellas que no estructuran el poliedro de soluciones factibles.
- Región de soluciones factibles: conjunto de (infinitos) puntos factibles limitados por cada restricción que compone el poliedro. Intersección de todos los medios espacios generados por las restricciones. El borde de la región se denomina frontera.
- Solución factible: todo punto que integra el polígono o poliedro (región) de soluciones factibles. A partir de una solución factible se deriva luego una solución básica factible.

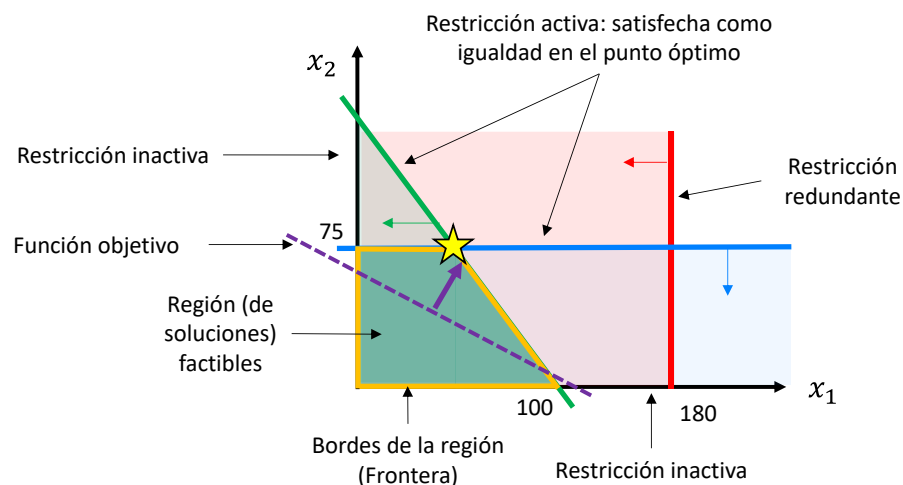


Figura 15.- Elementos de un problema de programación lineal (elaboración propia).

1.6. Formas equivalentes de un PPL

Teniendo como base un PPL, es posible procesar el modelo y representarlo de una forma más adecuada y conveniente, conforme al algoritmo de solución empleado y a la necesidad de modelación.

A continuación, se estudiarán las principales formas equivalentes de un PPL.

1.6.1. Sentido de optimización

En un PPL es posible cambiar el sentido de minimización o maximización por su opuesto, multiplicando la función objetivo por un factor -1 (menos 1). Entonces, el mínimo de una función objetivo determinada es equivalente al negativo del máximo de esa función objetivo y viceversa. La Figura 16 muestra las equivalencias señaladas:

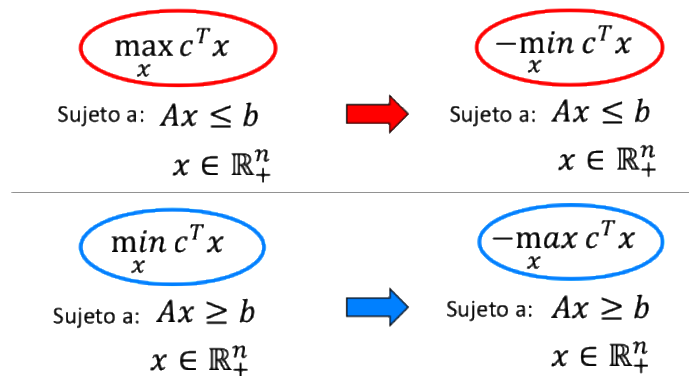


Figura 16.- Equivalencia del sentido de optimización en un PPL (elaboración propia).

1.6.2. Sentido de las desigualdades

El sentido de las desigualdades define la región en la cual las soluciones factibles se encuentran insertas. El sentido de la desigualdad de una restricción es factible ser cambiado al multiplicar ambos lados de la restricción por el factor -1 .

Por ejemplo, si se tiene $2x + 3y \geq 5$, el cambio de sentido se logra al multiplicar la expresión por -1 , quedando $-2x - 3y \leq -5$. Esta equivalencia es especialmente útil cuando se requiere configurar la formulación del problema para la aplicación de algún algoritmo especializado como Simplex, el que será estudiado en las próximas secciones.

$$\begin{aligned} & \max_{x,h} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \mathbf{0 \cdot h_1} + \mathbf{0 \cdot h_2} + \dots + \mathbf{0 \cdot h_m} \\ \text{Sujeto a: } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \mathbf{h_1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \mathbf{h_2} = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \mathbf{h_m} = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \mathbf{h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \dots h_m \geq 0} \end{aligned}$$

Figura 18.- Forma canónica de un PPL de maximización (elaboración propia).

$$\begin{aligned} & \min_{x,h} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \mathbf{0 \cdot e_1} + \mathbf{0 \cdot e_2} + \dots + \mathbf{0 \cdot e_m} \\ \text{Sujeto a: } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - \mathbf{e_1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - \mathbf{e_2} = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - \mathbf{e_m} = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \mathbf{e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \dots e_m \geq 0} \end{aligned}$$

Figura 19.- Forma canónica de un PPL de minimización (elaboración propia).

1.6.5. Transformación de igualdad en desigualdad

Una restricción de igualdad es equivalente a dos restricciones de desigualdad con signo opuesto (\geq y \leq). Una expresión que simultáneamente es mayor o igual y menor o igual a una constante, tiene como elemento común el “igual”.

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = b_i \leftrightarrow \begin{cases} r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n \geq b_i \\ r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n \leq b_i \end{cases}$$

La desventaja de esta formulación es que por cada igualdad aparecen dos desigualdades, duplicándose la cantidad de restricciones que tiene el PPL.

Ante esto, hay una alternativa para evitar el incremento del tamaño del PPL. Una expresión con m restricciones del tipo:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Se puede representar a través de $m + 1$ restricciones, conforme a las siguientes expresiones:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i$$

1.6.6. Variables de decisión libres

Una variable de decisión libre es aquella que puede adoptar valores en todo el dominio de los números reales (aplicable para los PPL que se estudiarán en esta publicación). Una restricción con una variable de decisión libre (x_j libre) tiene la forma:

$$\begin{aligned} r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_jx_j + \dots + r_nx_n &\geq b_i \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \\ x_j &\text{ libre} \end{aligned}$$

La variable libre es reemplazada por la diferencia entre dos variables auxiliares no negativas ($x_j = x_j^+ - x_j^-$, donde $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$). Una vez definida la equivalencia, la variable auxiliar es reemplazada en la restricción original, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_jx_j^+ - r_jx_j^- + \dots + r_nx_n &\geq b_i \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_j^+ &\geq 0, x_j^- \geq 0 \end{aligned}$$

1.7. Función de Lagrange

La función de Lagrange constituye una reformulación de un PPL, en el cual, se relajan las restricciones de igualdad y desigualdad, es decir, se eliminan, y se incorporan a la función objetivo multiplicadas por una variable auxiliar. Esta función se denomina multiplicador de Lagrange.

Sea un PPL en su forma canónica (no necesariamente convexo) de la forma:

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ \text{Sujeto a: } & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

En el cual, la variable de decisión es $x \in R^n$, el dominio de la función es D y la solución óptima al problema es p^* . La función de Lagrange (también conocido como Lagrangiano) es:

$$\begin{aligned} L: R^n \times R^m \times R^p &\rightarrow R, \text{ con } \text{dom } L = D \times R^m \times R^p, \\ L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) \end{aligned}$$

Donde $\lambda_i \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange para las restricciones de desigualdad $g_i(x) \leq 0$ y $\mu_i \in R^p$ es el multiplicador de Lagrange asociado a las restricciones de igualdad $h_i(x) = 0$.

A través de la función de Lagrange es posible reformular el PPL a una forma equivalente denominada "forma dual", lo que facilita, en ciertos casos, la resolución de los PPL.

Igualmente, los multiplicadores de Lagrange tienen una interpretación económica asociada a los denominados “precios sombra” y “costos reducidos”, conceptos que serán estudiados en profundidad más adelante.

1.8. Algoritmos y complejidad computacional

La Investigación Operacional sustenta su mecanismo de resolución de problemas productivos, entre otros, a través de la optimización. Dentro de la optimización, se utilizan diversos métodos tales como las formulaciones de los problemas mediante programación lineal (funciones lineales-afines y variables continuas), programación entera (funciones lineales-afines y variables enteras y/o binarias), etc., los que son generalmente resueltos de manera computacional.

Por otro lado, los métodos que utiliza un computador para resolver un problema de optimización, independiente del tipo de formulación o técnica de modelación que se utilice, se basan en algoritmos especializados, tales como el método Simplex (a ser estudiado posteriormente), método del punto interior, método de generación de columnas, método de planos cortantes, etc.

Un algoritmo es una secuencia de pasos, los que, de forma ordenada y secuencial, conducen a obtener un resultado determinado dado un insumo (o elemento de entrada) para su ejecución.

Asimismo, el computador constituye la herramienta que ejecuta un algoritmo para la obtención del producto deseado. Por lo tanto, el computador debe entender qué es lo que dice el algoritmo. El entendimiento común entre computador y algoritmo se logra a través de un lenguaje de programación,

mediante el cual, el algoritmo es escrito y el computador lo interpreta y ejecuta.

Conforme a sus características técnicas, el computador tiene un tiempo de demora en la ejecución de un paso de cálculo. Por lo tanto, dependiendo de la cantidad de pasos que tenga el algoritmo y de su estructura, el computador tomará un mayor o menor tiempo de ejecución del algoritmo. No obstante, el avance de la tecnología hace que los tiempos de resolución sean cada vez menores, ya que los sistemas pueden procesar mayor cantidad de operaciones en una unidad de tiempo.

Consecuentemente, en vez de enfocar el análisis de la eficiencia de un algoritmo por el tiempo real de ejecución que tiene en un computador específico, el estudio de dicha eficiencia se centrará en el número de operaciones requeridas para ejecutar un algoritmo.

Formalmente, la complejidad computacional se entenderá como la cantidad de recursos que el algoritmo requiere para funcionar. Los recursos pueden ser de dos tipos: tiempo de resolución y espacio, es decir, cuanto almacenamiento requiere en términos de memoria computacional. Para efectos de este ensayo, se analizará la complejidad computacional en función de los pasos que se requieren para ejecutar el algoritmo, en el peor caso, asumiendo que la cantidad de pasos que se ejecuten será proporcional al tiempo de resolución.

La complejidad computacional se representa por el uso de la notación denominada *gran o* (BIG-O en inglés), a través de la notación \mathcal{O} .

Matemáticamente, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, se dice que $f(n)$ está en $\mathcal{O}(g(n))$, si existen naturales c y n_0 tales que, para todo natural $n > n_0$, se cumple que $f(n) \leq cg(n)$ (Moreno & Ramírez, 2011).

Por ejemplo, sea $f(n) = 7n^4 + 2n^3 + 15n + 5$, entonces se toma el coeficiente de mayor orden $7n^4$ y se descarta el coeficiente 7, por lo que $f(n)$ está en $\mathcal{O}(n^4)$ de complejidad computacional. Note que, para la definición del párrafo anterior, con $c = 8$ y $n_0 = 2$, se cumple que $7n^4 + 2n^3 + 15n + 5 < 8n^4, \forall n \geq 3$.

En la práctica, la complejidad computacional se representa con la notación \mathcal{O} porque denota que la ejecución del algoritmo está en el orden de $g(n)$ pasos. En la siguiente tabla se muestran los tipos más comunes de complejidad y su nombre.

Complejidad	Denominación
$\mathcal{O}(1)$	Constante
$\mathcal{O}(\log n)$	Logarítmica
$\mathcal{O}((\log n)^k), \forall k \in \mathbb{N}$	Poli-logarítmica
$\mathcal{O}(n)$	Lineal
$\mathcal{O}(n \log n)$	Log-lineal
$\mathcal{O}(n^2)$	Cuadrático
$\mathcal{O}(n^3)$	Cúbico
$\mathcal{O}(n^k), \forall k \in \mathbb{N}$	Polinomial
$\mathcal{O}(c^n), \forall c > 1$	Exponencial
$\mathcal{O}(n!)$	Factorial

Tabla 1.- Tipos de complejidad computacional (Moreno & Ramírez, 2011).

1.9. Metodología para formular un PPL

Encontrar la solución de un PPL es el paso cúlmine de un proceso que no solo incluye el empleo de algoritmos de resolución de esos problemas, sino que tareas previas conducentes a la formulación del modelo matemático que

representa el sistema en estudio. La metodología de formulación de un PPL puede sintetizarse en los siguientes pasos:

- Identificar el objetivo a optimizar: reconocer, en la formulación del problema, qué debe ser minimizado o maximizado.
- Identificar las decisiones a tomar: en función al objetivo identificado, se debe reconocer cuál es la decisión a adoptar y que repercutirá en el objetivo.
- Identificar que limita alcanzar el objetivo: se debe reconocer cuales son los parámetros, como recursos, elementos a combinar o limitaciones de materiales que complejizan la toma de decisiones.
- Definir las variables de decisión: relacionadas con las decisiones a tomar.
- Definir la función objetivo: relacionada con el objetivo a optimizar.
- Definir las restricciones: relacionadas con las limitaciones o requerimientos para alcanzar el objetivo y tomar la decisión.

2. MÉTODO GRÁFICO

Los problemas de programación lineal en dos dimensiones pueden ser resueltos de manera eficiente a través del método gráfico. El mecanismo base de este método es la graficación de las restricciones y función objetivo y, posteriormente, la determinación del punto y valor óptimo (solución óptima).

2.1. Procedimiento del método gráfico

La formulación y resolución de PPL mediante el método gráfico involucra ejecutar las siguientes tareas:

- Plantear el modelo de programación lineal, conforme a lo señalado en la descripción del sistema, considerando que debe ser de dos variables (paso 1).
- Transformar las desigualdades de las restricciones en igualdades (paso 2).
- Graficar los ejes cartesianos, considerando que en el plano se utilizará el cuadrante I, el que representa ambas variables no negativas (paso 3).
- Dibujar las ecuaciones correspondientes a las rectas definidas por las restricciones del paso 2 (paso 4).
- Determinar la región de soluciones factibles, como el espacio común de intersección de todas las restricciones (paso 5).
- Identificar los puntos extremos de la región de soluciones factibles (paso 6).
- Dibujar la función objetivo (FO) en el plano. Esto se realiza a través de igualar la ecuación de la FO a una constante que permita definir su pendiente y posición relativa (paso 7).

- Desplazar la FO en la dirección en que su valor se incremente o reduzca, conforme corresponda a un problema de maximización o minimización, respectivamente (paso 8).
- Determinar el punto óptimo, las restricciones activas, inactivas y redundantes (paso 9).
- Calcular el punto óptimo, dado por la intersección de restricciones activas, y el valor óptimo a base de reemplazar el punto óptimo en la función objetivo (paso 10).

2.2. Caso aplicado del método gráfico

Para explicar el funcionamiento del método gráfico, se procederá a plantear y resolver un ejemplo numérico de un PPL.

- Paso 1: plantear el modelo de programación lineal: se encuentra dado por un PPL como el que sigue:

$$\begin{array}{ll}
 \max_x & 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{Sujeto a:} & x_1 \leq 180 \\
 & 2x_2 \leq 150 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
 \end{array}$$

- Paso 2: transformar las desigualdades de las restricciones en igualdades:

$$\text{Restricción 1: } x_1 = 180$$

$$\text{Restricción 2: } 2x_2 = 150 \rightarrow x_2 = \frac{150}{2} = 75$$

$$\text{Restricción 3: } x_1 + 2x_2 \leq 300 \rightarrow \text{si } x_2 = 0, \\ \text{entonces: } 3x_1 + 2 \cdot 0 = 300 \rightarrow x_1 = 100$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 300 \rightarrow \text{si } x_1 = 0, \\ \text{entonces: } 3 \cdot 0 + 2x_2 = 300 \rightarrow x_2 = 150$$

Mediante los puntos obtenidos en el procedimiento descrito, se podrá graficar cada restricción en el paso 4.

- Paso 3: graficar los ejes cartesianos:

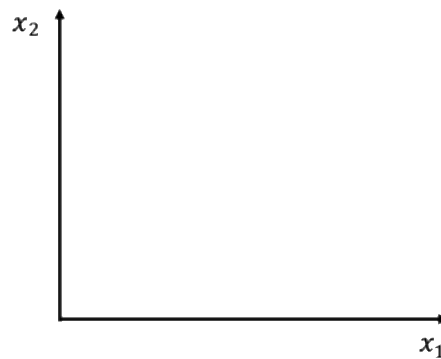


Figura 20.- Ejes cartesianos del ejemplo de método gráfico (elaboración propia).

- Paso 4: dibujar las restricciones:

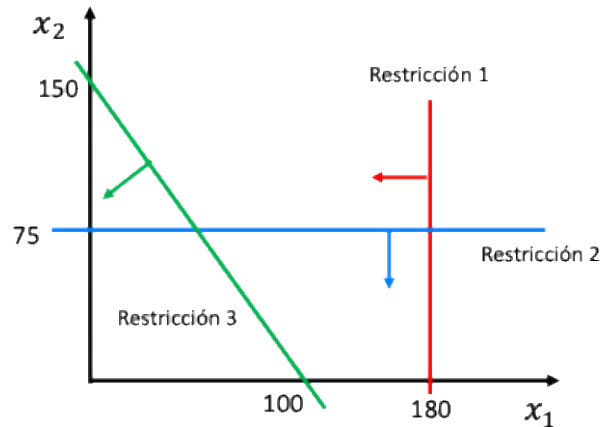


Figura 21.- Restricciones del ejemplo de método gráfico (elaboración propia).

- Paso 5: determinar la región de soluciones factibles (poliedro):

A base de las restricciones graficadas en el plano cartesiano y la determinación de la dirección de acción de las

desigualdades marcadas por las flechas señaladas en el paso 4, es factible determinar la región común que satisface simultáneamente a las tres restricciones y que forma un polígono (se muestra en color verde en la Figura 22).

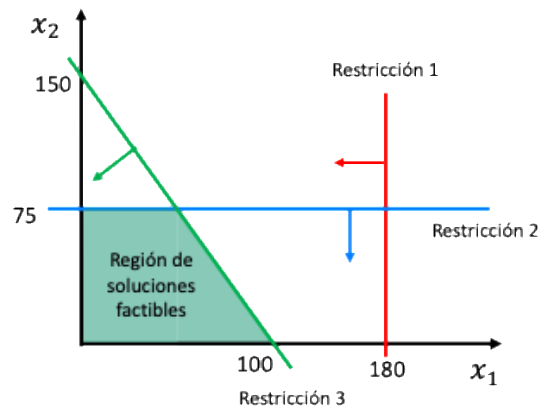


Figura 22.- Región de soluciones factibles (elaboración propia).

- Paso 6: identificar los puntos extremos de la región de soluciones factibles.

En un polígono, los puntos extremos corresponden a los vértices del mismo y constituyen soluciones factibles del PPL. En este ejemplo, existen cuatro puntos extremos y que se muestran en amarillo en la Figura 23.

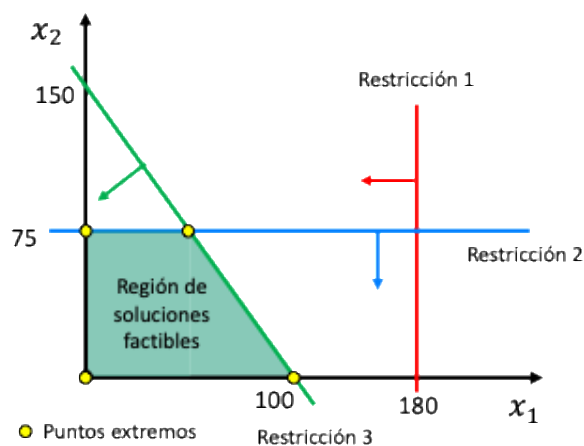


Figura 23.- Puntos extremos de una región (elaboración propia).

- Paso 7: dibujar la función objetivo (FO) en el plano.

La función objetivo corresponde a una función lineal, la cual, puede ser graficada en el plano cartesiano al igualarla a una constante, a fin de encontrar las intersecciones con los ejes. La Figura 24 muestra el procedimiento de cálculo para su graficación y la Figura 25 el resultado de aquello.

Función objetivo:

$$3x_1 + 5x_2 = cte = 150$$

Si $x_2 = 0$, entonces

$$3x_1 + 5 \cdot 0 = 150 \Rightarrow x_1 = 50$$

Si $x_1 = 0$, entonces

$$3 \cdot 0 + 5x_2 = 150 \Rightarrow x_2 = 30$$

Figura 24.- Cálculo de intersección de la función objetivo (elaboración propia).

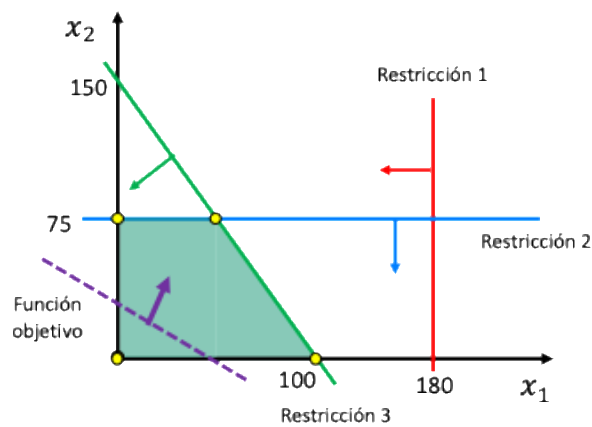


Figura 25.- Graficación de la función objetivo (elaboración propia).

- Paso 8: desplazar la FO en la dirección de optimización.

Para un problema de maximización, la función objetivo se deberá desplazar hacia el sector del plano en el que dicha función aumenta. En el caso de un problema de minimización, corresponde al caso contrario, es decir, el valor de la función objetivo disminuye.

En ambos casos, la evaluación se realiza reemplazando alguno de los puntos extremos de la región de soluciones factibles con la función objetivo.

En el ejemplo analizado, la función objetivo es de maximización y se desplaza en diagonal hacia “arriba” y a la “derecha” del plano cartesiano de la Figura 25.

La dirección de avance de la función objetivo es ortogonal con respecto de la función lineal graficada que la representa, lo que es indicado por una flecha en la Figura 25.

- Paso 9: determinar el punto óptimo, las restricciones activas, inactivas y redundantes.

El proceso de graficación finalizó en el punto 7 y lo que se ha realizado, a partir de entonces, es darle un sentido a lo obtenido mediante la interpretación de la graficación.

La determinación del punto óptimo se realiza desplazando la función objetivo en dirección al sentido de maximización. Corresponde al último punto, representado por algún vértice, al que toca la función objetivo antes de dejar de superponerse con la región de soluciones factibles.

Un caso especial es cuando la función objetivo tiene igual pendiente que una de las restricciones. En este caso, el último contacto que tiene la función objetivo con la región de soluciones factibles es la superposición con la arista de la región que representa la restricción, habiendo infinitos últimos puntos de solución, pero esta situación será estudiada más adelante.

En el ejemplo, el punto óptimo está dado por la intersección de las restricciones 2 y 3, señalado en la Figura 25 con una estrella de color anaranjado.

Las restricciones activas son aquellas cuya intersección genera el punto óptimo, por lo tanto, son en este caso las restricciones 2 y 3. Cabe señalar que estas restricciones son satisfechas en igualdad en el punto óptimo.

La restricción redundante es la número 1, ya que no está representada en la frontera de la región de soluciones factibles, por lo que su participación en el PPL es indiferente, pudiendo estar o no considerada.

Finalmente, las restricciones inactivas son las restricciones de no negatividad de los ejes $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Si bien, conforman la frontera de la región de soluciones factibles, no son satisfechas en igualdad. La Figura 26 presenta los resultados señalados en el paso 9.

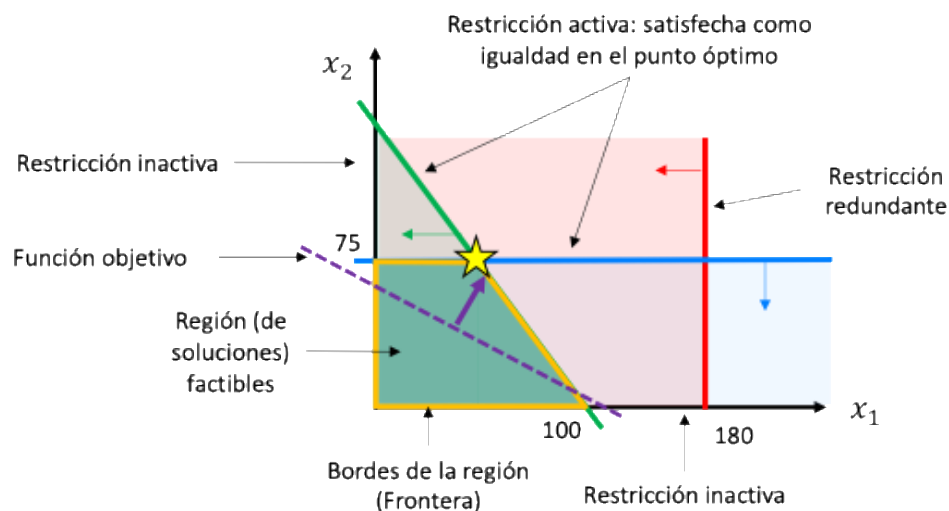


Figura 26.- Solución al PPL por el método gráfico (elaboración propia).

- Calcular el punto óptimo, dado por la intersección de restricciones activas, y el valor óptimo (FO maximizada o minimizada).

El punto óptimo tiene como valor $(x_1 = 50, x_2 = 75)$, lo que, reemplazado en la función objetivo, entrega un valor de $z = 525$, el que corresponde al valor óptimo. Ambos valores constituyen la solución óptima del PPL.

2.3. Generalidades del método gráfico

El método gráfico es el procedimiento inicial y más intuitivo que existe para resolver un PPL, de manera visual, sin requerir la ejecución de otras operatorias y procedimientos más que las cuatro operaciones elementales.

Las soluciones del método gráfico se obtienen al encontrar el punto óptimo, el que, corresponde a uno de los puntos extremos de la región de soluciones factibles o poliedro, generándose a base de la intersección de dos o más restricciones. A su vez, el valor óptimo corresponde al valor que adopta la función objetivo reemplazada en el punto óptimo, siendo el más alto posible dentro de las restricciones impuestas si es que el PPL es de maximización o el más bajo si es de minimización.

Cuando el punto óptimo está representado por la intersección de tres o más restricciones en un espacio de dimensión \mathbb{R}^2 se denomina caso con soluciones degeneradas. Igualmente, cuando la pendiente de la función objetivo es igual a la pendiente de la restricción activa se denomina casos con soluciones múltiples (infinitas). Ambas situaciones, junto a otros casos especiales, serán estudiado en los próximos capítulos.

El método gráfico muy útil en problemas con dos variables de decisión, representadas en el plano. Sin embargo, para sistemas en tres dimensiones, el método gráfico se hace ineficiente debido a que una visualización en 3D de un plano no es totalmente informativa ni intuitiva. Sobre tres dimensiones, no es posible aplicar el método gráfico.

No obstante, a base de la información que entrega el método gráfico, se pueden hacer otros análisis, de tipo EX-POST, del problema ya resuelto, denominado análisis de sensibilidad. Dicho tipo de análisis permitirá al tomador de decisiones complementar la información obtenida a base de la solución óptima.

3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad corresponde a un procedimiento de análisis de pos-optimalidad, es decir, realizado después de obtener una solución óptima de un PPL, en la que se busca determinar dos aspectos principales: a) qué efecto tendría en dicha solución el cambio de alguno de los parámetros; b) en qué rangos podría cambiar el parámetro analizado sin afectar la solución óptima.

Lo anterior, tiene particular importancia considerando que los PPL entregan soluciones de tipo estática, es decir, que no varían en el tiempo, por lo que es relevante para el tomador de decisiones conocer el efecto que tiene en la solución el cambio en alguno de los parámetros.

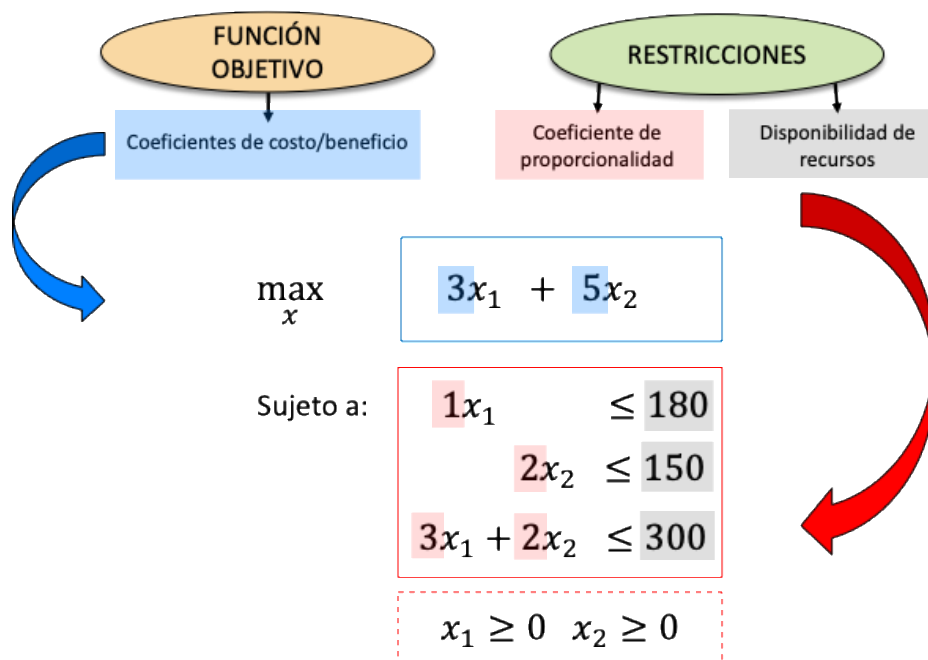


Figura 27.- Elementos de estudio del análisis de sensibilidad (elaboración propia).

Para tales efectos, se estudiarán dos tipos de análisis de sensibilidad: a) cambios en los parámetros de las restricciones, considerando el parámetro de coeficiente de proporcionalidad y de

disponibilidad de recurso; b) cambio en los parámetros de la función objetivo, a base de los coeficientes de costo vs beneficio.

Para facilitar la comprensión práctica de los conceptos de análisis de sensibilidad se utilizará el ejemplo ya presentado en el capítulo anterior. En la Figura 27, se muestra el PPL y los elementos a ser estudiados en este capítulo.

3.1. Parámetros de la función objetivo

La función objetivo establece matemáticamente el beneficio que tiene para el sistema modelado el adoptar una solución derivada de la determinación del punto óptimo.

Los coeficientes de la función objetivo determinan la pendiente de la recta de dicha función, representada por la expresión $z = c_1x_1 + c_2x_2$.

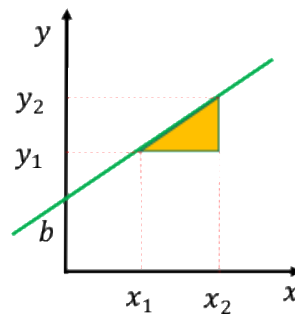


Figura 28.- Pendiente de la recta de la función objetivo (elaboración propia).

Una recta de la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente de dicha recta, según lo que se ejemplifica en la Figura 28, está representada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{A}{B}$$

Lo que implica que también equivale a la expresión:

$$y = \frac{A}{B}x + b$$

Ordenando los términos de la ecuación de la recta anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}(y - b)B &= Ax \\ Ax - By + b &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, si se reemplazan los coeficientes de la expresión anterior en la fórmula de la pendiente para la función objetivo (m_z), se tiene que:

$$m_z = -\frac{c_1}{c_2}$$

Consecuentemente, dado que la recta verde es creciente, su pendiente también es positiva, lo que se demuestra por el término A/B obtenido, siendo la pendiente de la función objetivo la siguiente expresión:

$$m_z = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$$

Conforme a lo analizado en el punto anterior, la variación en cualquiera de los coeficientes de la función objetivo implica que existirá también un cambio en su pendiente. Si la función objetivo se sitúa en la intersección con el punto óptimo, su posición variará rotando a base de dicho punto extremo (rectas z_1, z_2 y z_3 superpuestas en el punto óptimo), como se muestra en la Figura 29.

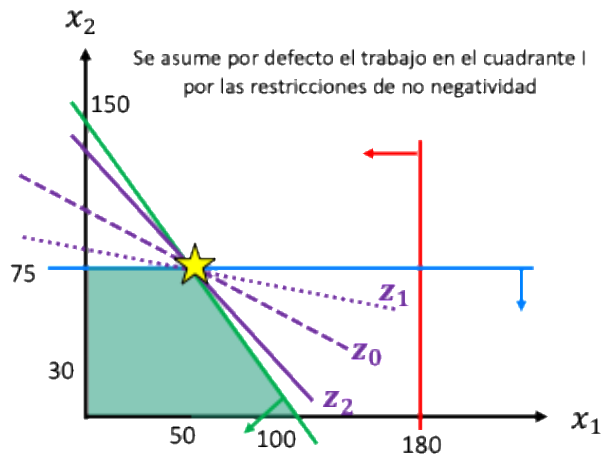


Figura 29.- Variación de la pendiente de la función objetivo (elaboración propia).

Para determinar el rango de variaciones de la función objetivo, es necesario encontrar el límite del máximo de variación que puede adoptar cada uno de sus coeficientes sin exceder las pendientes de las restricciones activas.

Si la función objetivo se mueve (cambia pendiente) entre las restricciones activas (azul y verde), el punto óptimo y valor óptimo no varía. Esto entrega un rango de variación aceptable para la función objetivo sin cambiar el punto y valor óptimo.

Entonces, el cálculo de variación máximo de los coeficientes se calcula a base de las pendientes de las restricciones activas. Para la restricción 2 (azul) se tiene que $2x_2 \leq 150 \rightarrow m_{R_2} = 0$ y para la restricción 3 (verde) que $3x_1 + 2x_2 \leq 300 \rightarrow m_{R_3} = -\frac{3}{2}$.

Luego, se realiza una equivalencia entre la función objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ y cada restricción $R = ax_1 + bx_2$, conforme a la siguiente expresión:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a}{b}$$

Si los coeficientes de la función objetivo varían dentro de dichos intervalos, la pendiente de esta será, a lo más, igual a las pendientes de las restricciones activas. Si los intervalos se definen abiertos (sin incluir los extremos), la función objetivo rotará entorno al punto extremo como pivote, sin que deje de ser el punto óptimo, lo que se representa en la Figura 32.

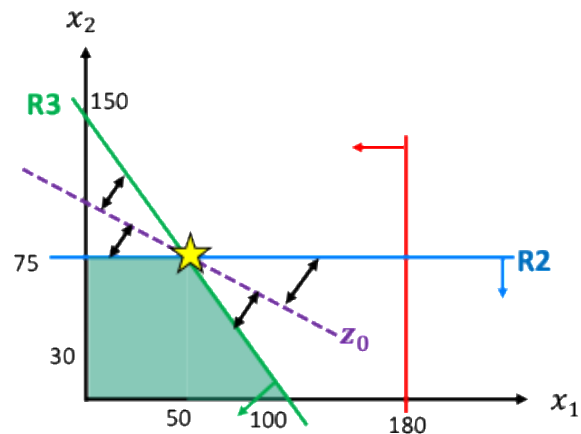


Figura 32.- Representación de la variación de coeficientes de la función objetivo (elaboración propia).

3.2. Parámetros de las restricciones

La variación de los parámetros de las restricciones pueden ser analizados a base de los coeficientes de proporcionalidad que acompañan a las variables de decisión (lado izquierdo de la restricción) y de los coeficientes de la disponibilidad de recursos (lado derecho de la restricción).

3.2.1. Coeficientes de proporcionalidad

La variación de los coeficientes de proporcionalidad de una restricción tiene un efecto matemático similar al de la función objetivo, a base de una variación en la pendiente de dicha recta.

Dada una restricción de la forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad \forall i \in I$, si alguno de los coeficientes a cambia, existe una variación de la pendiente; por lo tanto, cambia también la región de soluciones factibles.

Considere la restricción del PPL de estudio $3x_1 + 2x_2 \leq 300$. ¿Qué sucede si el coeficiente 3 se cambia a un valor 2? La restricción cambia a $2x_1 + 2x_2 \leq 300$, teniendo como intersecciones en los ejes de coordenadas $(x_1 = 150, x_2 = 0)$ y $(x_1 = 0, x_2 = 150)$. Gráficamente, el efecto del cambio del parámetro de la restricción se muestra en la Figura 33.

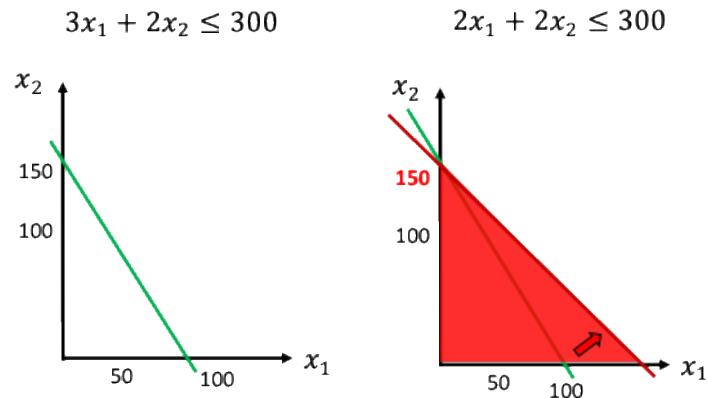


Figura 33.- Variación del coeficiente de proporcionalidad (elaboración propia).

El efecto del cambio en los coeficientes de proporcionalidad de las restricciones activas es la variación del tamaño de la región de soluciones factibles y de la solución óptima.

En el caso que se varíe el coeficiente de proporcionalidad de una restricción inactiva, también varía la región de soluciones factibles aunque no necesariamente el punto óptimo, a excepción que su cambio sea significativo en relación con las restricciones activas.

El cambio en los coeficientes de proporcionalidad de una restricción redundante puede, eventualmente, afectar la determinación de la región de soluciones factibles y del punto óptimo, dependiente de su magnitud, toda vez que debe dejar de ser redundante y ser al menos inactiva.

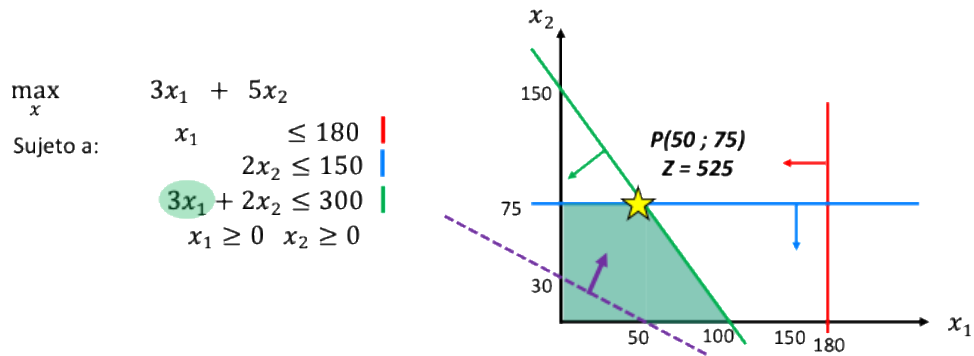


Figura 34.- Situación inicial del coeficiente de proporcionalidad del PPL (elaboración propia).

En el ejemplo en desarrollo, al reemplazar el coeficiente de la restricción 3, cambia el punto óptimo a $(x_1 = 75, x_2 = 75)$, con un valor óptimo de 600. La situación inicial y posterior al análisis de sensibilidad se muestran en la Figura 34 y Figura 35. Note que en esta última, el desplazamiento de la R3 en el eje $x_1 \geq 0$ genera que se produzca un efecto de “resbale” del punto óptimo sobre R2.

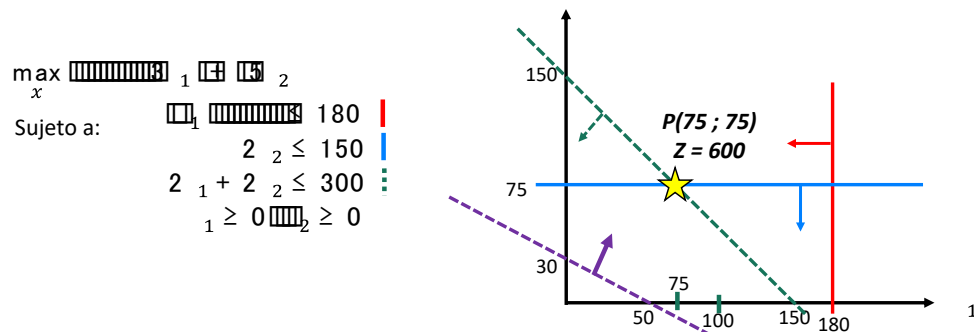


Figura 35.- Situación final de variación del coeficiente de proporcionalidad del PPL (elaboración propia).

3.2.2. Coeficientes de disponibilidad de recursos

El cambio de los coeficientes de disponibilidad de recursos de una restricción (lado derecho) genera un desplazamiento paralelo de la restricción en dirección ortogonal a ellas. No existe un cambio de pendiente en la restricción debido a que no hay variaciones en los coeficientes de proporcionalidad de la función que la determina.

La Figura 36 muestra el PPL con su solución óptima inicial y posteriormente su reformulación con una variación del coeficiente de disponibilidad de recursos de la restricción 2 aumentado en 50 unidades. La Figura 37 presenta gráficamente los resultados ya señalados.

$\begin{aligned} \max_x \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & x_1 \leq 180 \\ & 2x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">$P(50 ; 75)$ $Z = 525$</p>	$\begin{aligned} \max_x \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & x_1 \leq 180 \\ & 2x_2 \leq 200 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">$P(33,3 ; 100)$ $Z = 600$</p>
---	--

Figura 36.- Cambio en el coeficiente de disponibilidad de recursos en el PPL (elaboración propia).

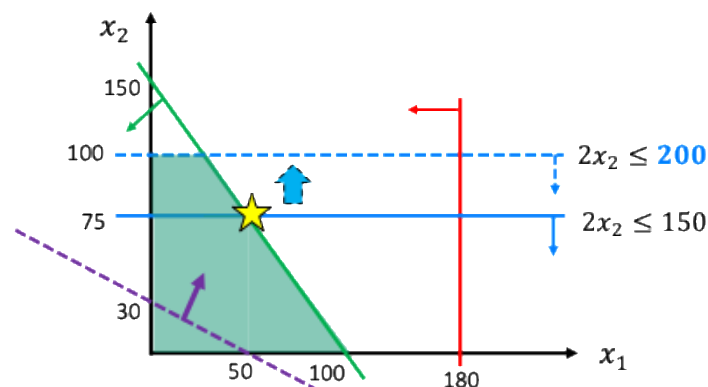


Figura 37.- Solución gráfica del PPL ante la variación del coeficiente de disponibilidad de recursos (elaboración propia).

Basado en los resultados anteriores, se puede observar lo siguiente:

- El recurso disponible de la 2da restricción (R2), fue aumentado en 50 unidades.
- El valor óptimo del problema de optimización aumentó en 75 unidades monetarias.

Por lo tanto, la variación del valor óptimo, en función a la variación de una unidad de recurso disponible se denomina “precio dual” o “precio sombra”, el que se define por la siguiente expresión:

$$\text{Precio Dual (Sombra)} = \frac{(\text{valor óptimo final} - \text{valor óptimo inicial})}{(\text{recurso final} - \text{recurso inicial})}$$

$$\text{Precio Dual (Sombra)} = \frac{\Delta \text{Valor óptimo}}{\Delta \text{Disponibilidad de recurso}}$$

Reemplazando el valor óptimo inicial y final, junto con la variación en la disponibilidad de recursos, se tiene lo siguiente:

$$\text{Precio Dual (Sombra)} = \frac{(600 - 525)}{(200 - 150)} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2} = 1,5 \frac{\text{un. beneficio}}{\text{un. recursos}}$$

Consecuentemente, el cambio del valor óptimo (función objetivo) debido a la variación de una unidad de recurso disponible es el denominado precio dual o sombra.

Para comprobar la equivalencia de esta afirmación con lo calculado anteriormente, se procederá a reformular el PPL aumentando solo una unidad del coeficiente de disponibilidad de recursos (Figura 38).

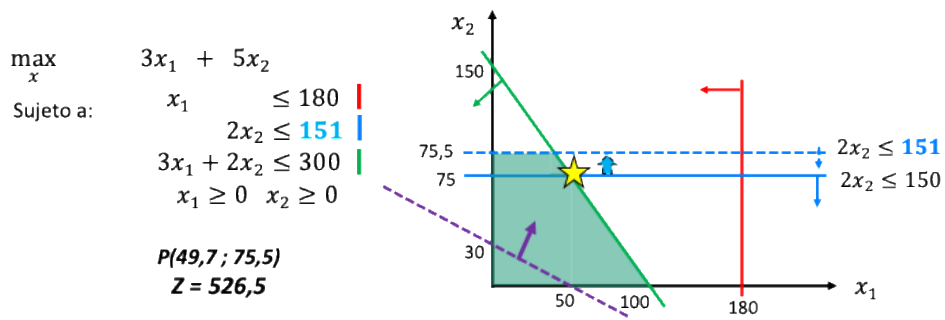


Figura 38.- Comprobación del precio dual o sombra en la restricción 2 (elaboración propia).

El cálculo del precio dual o sombra de la restricción 2, la que es activa, es el siguiente:

$$\text{Precio Dual} = \frac{526,5 - 525}{151 - 150} = 1,5$$

El resultado obtenido es similar a aquel calculado aplicando la fórmula derivada al inicio de esta sección. En el caso de calcular el precio dual o sombra de la restricción 3, que también es activa, se obtiene lo siguiente (Figura 39):

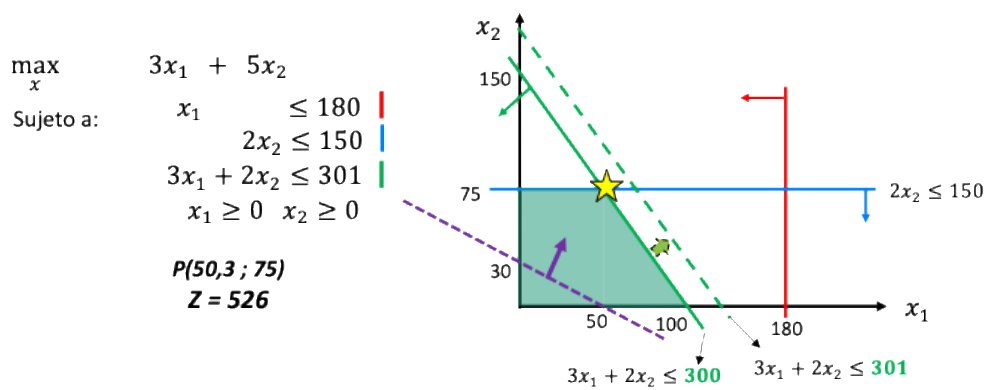


Figura 39.- Comprobación del precio dual o sombra en la restricción 3 (elaboración propia).

$$\text{Precio Dual} = \frac{526 - 525}{301 - 300} = 1,0$$

Entonces, en el caso de disponer de recursos que tienen un valor similar, el aumento de uno de ellos en la restricción 2 tiene un mayor retorno (1,5 unidades) que aumentarlo en la restricción 3 (1,0 unidad), lo que queda demostrado en el hecho que, para el primer caso, el valor óptimo es de 526,5 unidades y en el segundo es de 526 unidades.

En el caso del precio dual o sombra de una restricción redundante o inactiva, su valor es cero debido a que no participa en la determinación del punto óptimo, por lo que la variación del valor óptimo es cero también.

A continuación, se presenta el resultado del cálculo del precio dual o sombra de la restricción 1 (Figura 40).

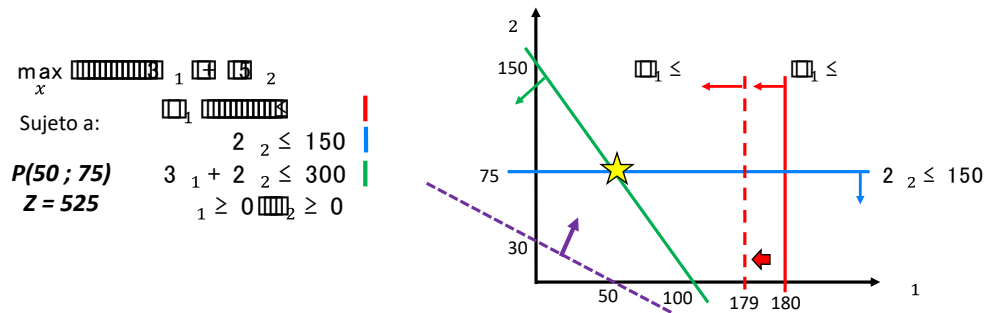


Figura 40.- Comprobación del precio dual o sombra en la restricción 1 (elaboración propia).

En el que, el precio dual o sombra es:

$$\text{Precio Dual} = \frac{525 - 525}{179 - 180} = 0$$

Finalmente, en el caso en que la restricción de no negatividad (definición de la variable de decisión) es una restricción activa, la variación del valor óptimo producto de la variación de una unidad de “recurso” de dicha restricción de no negatividad se

denomina “*costo reducido*”. Es análogo al precio dual para las restricciones de recursos.

En el siguiente ejemplo, se presenta un caso en el que la restricción de no negatividad es activa y existe un costo reducido diferente de cero (Figura 41):

$$\begin{array}{l}
 \max_x \quad x_2 \\
 \text{Sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \leq 8 \quad | \quad \color{green}{\rule{0pt}{1em}} \\
 \quad \quad \quad x_1 \geq 0 \quad | \quad \color{blue}{\rule{0pt}{1em}} \\
 \quad \quad \quad x_2 \geq 0 \quad | \quad \color{red}{\rule{0pt}{1em}}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \max_x \\ \text{Sujeto a:} \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 \max_x \quad x_2 \\
 \text{Sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \leq 8 \quad | \quad \color{green}{\rule{0pt}{1em}} \\
 \quad \quad \quad x_1 \geq 1 \quad | \quad \color{blue}{\rule{0pt}{1em}} \\
 \quad \quad \quad x_2 \geq 0 \quad | \quad \color{red}{\rule{0pt}{1em}}
 \end{array}$$

Figura 41.- Reformulación de un PPL por costo reducido (elaboración propia).

La solución óptima del problema original está constituida por un punto óptimo ($x_1 = 0; x_2 = 8$) con un valor óptimo de $z = 8$.

En el caso del problema reformulado (a la derecha de la Figura 41), el punto óptimo es ($x_1 = 1; x_2 = 7$) y el valor óptimo es $z = 7$ unidades. Entonces, el costo reducido (CR) tiene un valor de $CR = -1$ unidades de beneficio por unidad de recurso, lo que gráficamente se representa en la Figura 42.

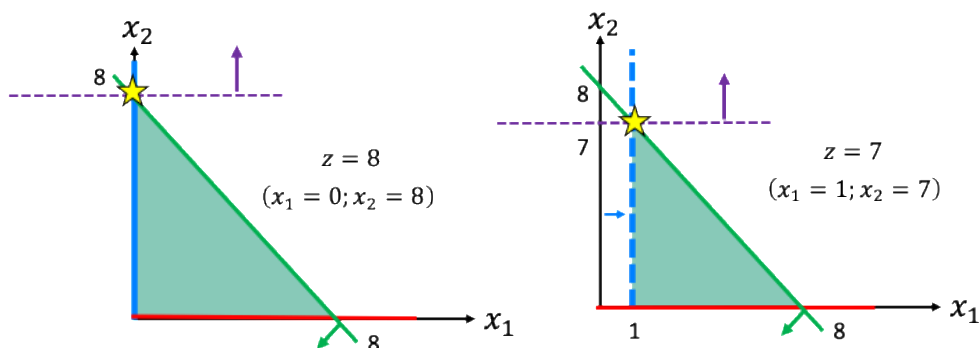


Figura 42.- Graficación de un PPL por costo reducido (elaboración propia).

3.3. Generalidades del análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad es un tipo de análisis estático (no dependiente del factor tiempo) de carácter EX POST, es decir, una vez obtenida la solución óptima, con el fin de comprobar su comportamiento ante las variaciones en los parámetros del modelo del PPL.

Las variaciones de los coeficientes que acompañan tanto las restricciones como la función objetivo generan cambios en la pendiente de sus rectas, haciendo variar la región de soluciones factibles para las restricciones activas y, dependiendo de la magnitud de la variación, de las restricciones inactivas o redundantes.

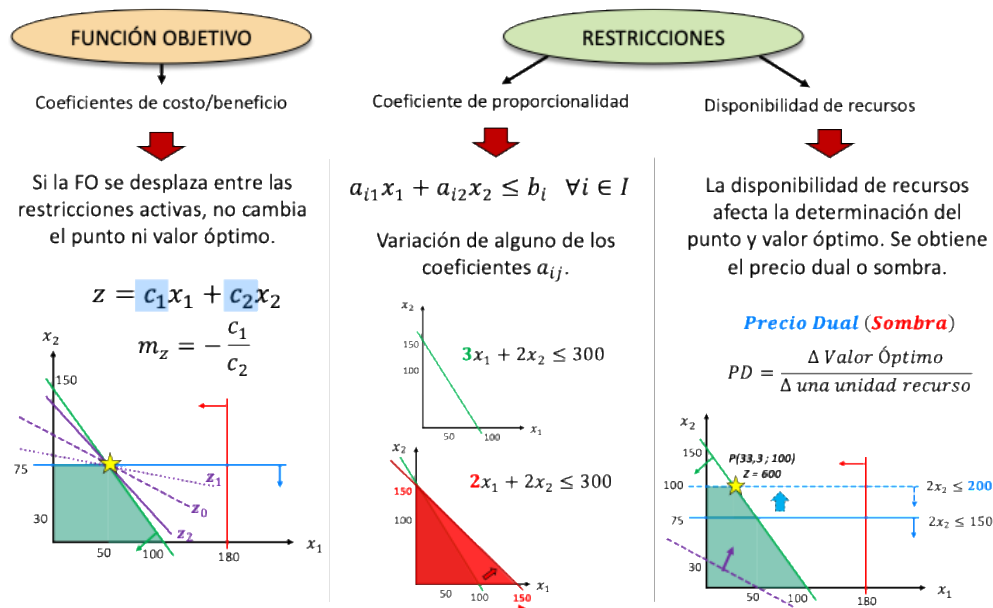


Figura 43.- Síntesis del análisis de sensibilidad (elaboración propia).

Particularmente, en el caso de existir una variación significativa en los parámetros de la función objetivo, podría generarse que su pendiente exceda el límite determinado para que punto óptimo inicial se mantenga, cambiando así la

solución. La variación en el coeficiente de disponibilidad de recursos de una restricción genera un desplazamiento de esta en dirección ortogonal a su posición inicial.

A base del análisis de sensibilidad y la variación del coeficiente de disponibilidad de recursos, fue posible definir el significado del precio dual o sombra y del costo reducido, dos conceptos que serán estudiados en mayor profundidad en los capítulos siguientes. En la Figura 43 se presenta una síntesis de los contenidos estudiados para el análisis de sensibilidad.

4. DUALIDAD

La dualidad es una forma alternativa de representar un PPL, basada en una transformación lineal del espacio del problema original, denominado problema primal. Consecuentemente, el PPL transformado se denomina problema dual.

En el problema dual, las variables de decisión están asociadas a cada una de las restricciones del problema primal. Del mismo modo, las restricciones del problema dual se derivan de las variables de decisión del problema primal.

El estudio de la dualidad comenzará con la aplicación de una regla de transformación del problema primal en su equivalente dual, la que es intuitiva y no requiere operatoria matemática. Posteriormente, se derivará el concepto de dualidad a partir de la definición de la función de Lagrange, presentada en la introducción de este ensayo.

4.1. Regla de transformación dual

Sea un problema de optimización de la forma $\min_x \{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$, se tiene la siguiente transformación dual (Figura 44):

$$\begin{array}{ccc} \min_x & c^T x & \\ \text{s.a.:} & Ax \geq b & \\ & x \geq 0 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \max_y & b^T y & \\ \text{s.a.:} & A^T y \leq c & \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

Figura 44.- Transformación dual minmax (elaboración propia).

De la transformación presentada se evidencia que hay un cambio en el espacio dado, donde el parámetro c^T que acompaña a la variable de decisión, es traspuesto para ser incorporado en

el coeficiente de disponibilidad de recursos de cada restricción y que el coeficiente de proporcionalidad A también es traspuesto en A^T para componer el nuevo conjunto de restricciones.

Igualmente, cuando la transformación es desde un problema primal de minimización, el sentido de la desigualdad de las restricciones del problema primal se traspasa inalterado a las variables de decisión del problema dual, pero el sentido de la desigualdad de la variable de decisión primal se invierte cuando pasa a la restricción del problema dual.

Basado en lo anterior, se deduce que la cantidad dual de restricciones es igual a la cantidad de variables de decisión primal y que la cantidad dual de variables de decisión es similar a la cantidad de restricciones primal. La Figura 45 muestra la transformación dual de un problema de la forma $\max_x \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$.

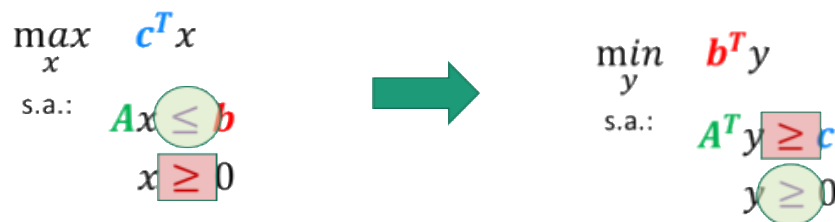


Figura 45.- Transformación dual maxmin (elaboración propia).

Opuestamente a lo señalado en la transformación del problema primal de minimización, cuando se comienza desde un problema de maximización, el sentido de desigualdad primal-dual de las restricciones a las variables de decisión, respectivamente, cambia, pero no así el sentido de la desigualdad de la variable de decisión primal cuando de traspasa a la restricción dual.

No obstante, y en consideración a que el problema primal y el problema dual son equivalentes, es factible también revertir la estructura del problema aplicando una regla similar, como se muestra en la Figura 46:

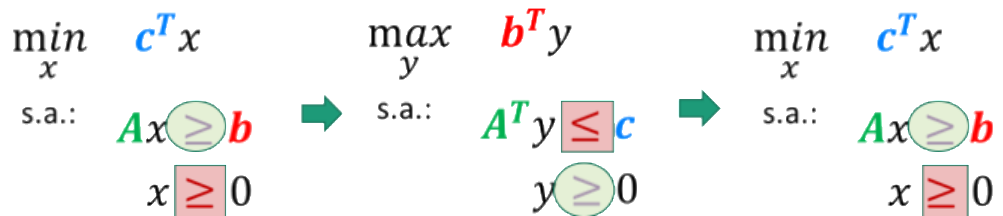


Figura 46.- Transformación secuencial primal - dual (elaboración propia).

Lo anterior, se resume en la Figura 47, en la cual se comparan las formulaciones de un PPL y la estructura de sus partes para el problema primal y dual.

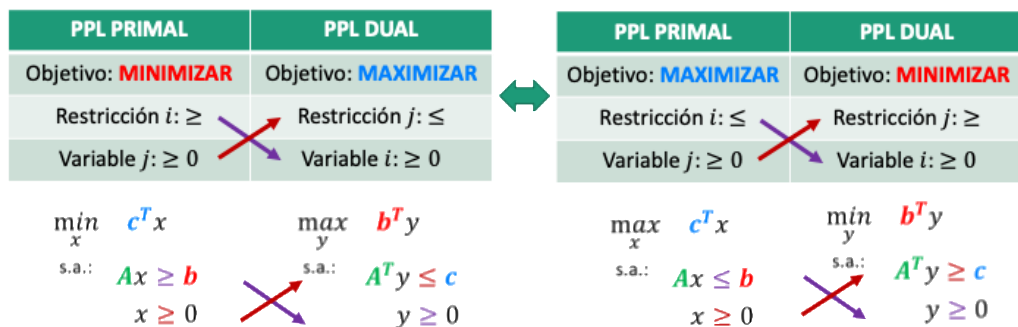


Figura 47.- Regla general de transformación primal - dual (elaboración propia).

Como consideraciones complementarias, una restricción de igualdad en el primal se convierte en una variable de decisión dual libre (puede adoptar cualquier valor en el conjunto de los números reales como dominio). Análogamente, una variable libre en el problema primal, se convierte en una restricción de igualdad en el problema dual.

Finalmente, si el problema primal es *no acotado* (las restricciones no generan una región de soluciones factibles cerradas y la función objetivo avanza infinitamente en una dirección), el resultado dual es *no factible*. En cambio, cuando el problema primal es *no factible*, el problema dual es *no acotado*.

4.2. Dualidad mediante los multiplicadores de Lagrange

4.2.1. Derivación del problema dual

Recordando la función de Lagrange o Lagrangiano, definido por la expresión:

$$L: R^n \times R^m \times R^p \rightarrow R, \text{ con } \text{dom } L = D \times R^m \times R^p,$$

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x)$$

Se establece que $\lambda_i \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange para las restricciones de desigualdad $g_i(x) \leq 0$. Igualmente, $\mu_i \in R^p$ es el multiplicador de Lagrange asociado a las restricciones de igualdad $h_i(x) = 0$.

Destaca el hecho de que existe una variable de decisión λ o μ que se encuentra asociada a una restricción en particular, dependiendo de qué variable se analice.

Es decir, existe una relación uno a uno entre las restricciones del problema inicial (primal) y las variables introducidas en la función de Lagrange.

Entonces, la minimización de la función Lagrangiana anterior es la siguiente expresión:

$$L_D(\lambda, \mu) = \inf_{x \in D} L(x, \lambda, \mu)$$

$$L_D(\lambda, \mu) = \inf_{x \in D} \left(f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) \right)$$

Siendo L_D definida como la función dual de Lagrange. L es una función cóncava y puede tomar valores $-\infty$ para algunos λ, μ . Esta función posee la propiedad del límite inferior, como sigue:

$$\text{si } \lambda \geq 0, \text{ entonces } L_D(\lambda, \mu) \leq p^*$$

- Prueba: si \tilde{x} es factible y $\lambda \geq 0$, entonces:

$$f(\tilde{x}) \geq L(\tilde{x}, \lambda, \mu) \geq \inf_{x \in D} L(x, \lambda, \mu) = L_D(\lambda, \mu)$$

Minimizando sobre todas las soluciones \tilde{x} factibles, se obtiene (p^* solución óptima del problema primal):

$$p^* \geq L_D(\lambda, \mu)$$

Consecuentemente, utilizando el resultado de la función dual de Lagrange, se puede formular el problema dual de Lagrange de la siguiente forma:

$$\max_{\lambda, \mu} L_D(\lambda, \mu)$$

Sujeto a: $\lambda \geq 0$
 μ libre

Lo que es equivalente a la siguiente expresión:

$$\max_{\lambda, \mu} \min_{x \in D} \left(f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) \right)$$

Sujeto a: $\lambda \geq 0$
 μ libre

El problema dual de Lagrange es un problema de optimización convexo y su solución óptima se denota por d^* . Las variables de decisión dual λ, μ son factibles en la formulación dual si $\lambda \geq 0$ y si $(\lambda, \mu) \in \text{dom } L_D$, explícitamente. La Figura 48 muestra la síntesis del proceso de definición del problema dual a base de la función de Lagrange.

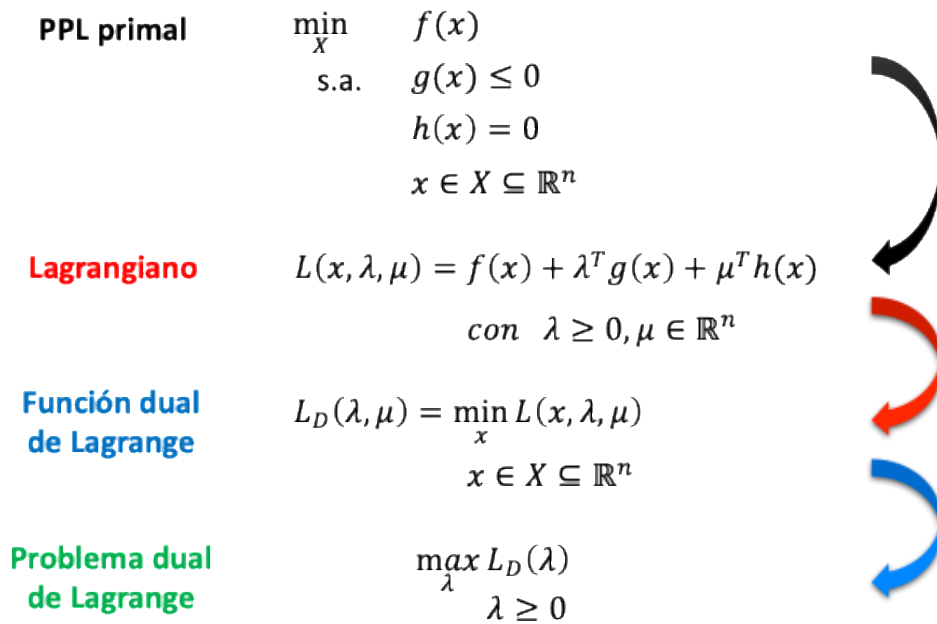


Figura 48.- Resumen del proceso de reformulación dual (elaboración propia).

Para otorgar al lector una visión más concreta del proceso de reformulación, se presenta un caso abstracto similar a aquellos que posteriormente serán resueltos. Dado un PPL en su forma original (izquierda), se reordenan los términos para dejarlo en la forma canónica (derecha), según lo que se observa en la Figura 49.

$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$	}	$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & b - Ax \leq 0 \\ & -x \leq 0 \end{aligned}$
---	---	--

Figura 49.- PPL y formulación canónica para dualidad (elaboración propia).

El Lagrangiano (función de Lagrange) es definido por la siguiente expresión:

$$L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda^T (b - Ax) + \mu^T (-x), \quad \text{con } \lambda, \mu \geq 0$$

Reordenando los términos y aislando la variable de decisión primal x , se obtiene que la función de Lagrange está representada por:

$$L(x, \lambda, \mu) = x(c - A^T \lambda - \mu)^T + b^T \lambda, \quad \text{con } \lambda, \mu \geq 0$$

A base de la función de Lagrange, se compone la función dual de Lagrange, como sigue:

$$L_D(\lambda, \mu) = \min_{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n} x(c - A^T \lambda - \mu)^T + b^T \lambda$$

Analíticamente, si el componente $c - A^T \lambda - \mu$ que acompaña a la variable de decisión x es igual a cero, el mínimo de la expresión $x(c - A^T \lambda - \mu)^T + b^T \lambda$ es igual a $b^T \lambda$.

De otro modo, y considerando que la variable de decisión x está definida en todo el dominio de \mathbb{R} , el mínimo sería $-\infty$. Matemáticamente, se representa de la siguiente forma:

$$L_D(\lambda, \mu) = \begin{cases} b^T \lambda & c - A^T \lambda - \mu = 0 \\ -\infty & \text{De otro modo} \end{cases}$$

Por último, el problema dual de Lagrange se obtiene al maximizar la función dual de Lagrange, teniendo como variables de decisión λ y μ , de la siguiente forma:

$$\max_{\lambda, \mu \geq 0} L_D(\lambda, \mu)$$

Dado que ya se conoce la solución de la función dual de Lagrange ($b^T \lambda$ sujeto a que $c - A^T \lambda - \mu = 0$), se reemplaza en la expresión anterior, obteniéndose que:

$$\max_{\lambda, \mu \geq 0} \{b^T \lambda: A^T \lambda + \mu = c\}$$

No obstante, la variable de decisión dual μ no tiene influencia en la función objetivo. Igualmente, en la restricción ocupa un rol de variable de exceso, lo que implica que, en el caso de eliminarse, no afectará la solución óptima y que la restricción $A^T \lambda + \mu = c$ dejará de satisfacerse en igualdad, quedando de la forma $A^T \lambda \leq c$. La formulación del problema dual de Lagrange queda de la siguiente forma:

$$\max_{\lambda \geq 0} \{b^T \lambda: A^T \lambda \leq c\}$$

Aplicando la regla de dualidad vista en la primera parte de este capítulo, la transformación del PPL primal planteado genera un PPL dual similar al obtenido en el párrafo anterior, lo que comprueba que ambas estrategias de reformulación son equivalentes. La Figura 50 muestra la reformulación mediante la regla de la primera parte.

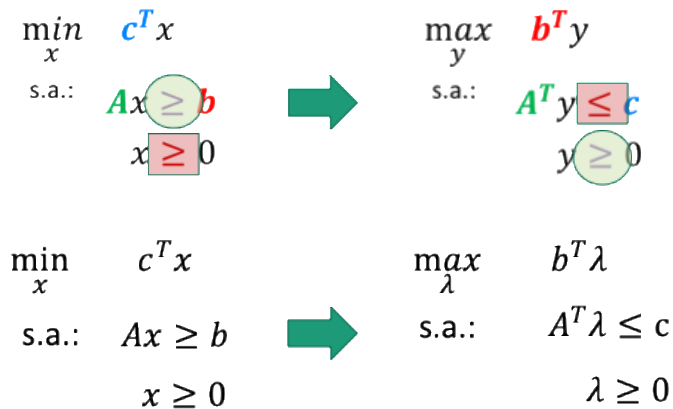


Figura 50.- Comparación de regla de reformulación y problema duales de Lagrange (elaboración propia).

La síntesis de los pasos aplicados y del proceso de obtención de la formulación dual se presentan en la Figura 51:

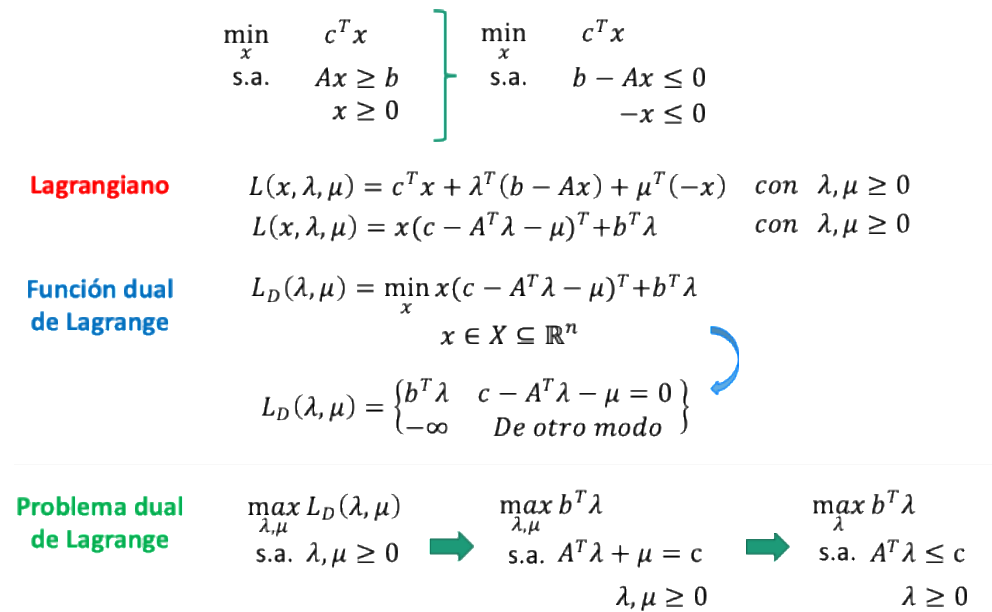


Figura 51.- Síntesis del proceso de obtención de la formulación dual (elaboración propia).

4.2.2. Dualidad débil y fuerte

Independiente de la convexidad del problema primal, la reformulación dual es siempre convexa, lo que implica que el punto óptimo local será también el global.

La dualidad débil se genera cuando la solución del problema dual entrega una cota inferior al problema primal, es decir, una aproximación al valor óptimo del problema primal cuando es de minimización.

La dualidad fuerte se cumple cuando las variables de decisión dual o multiplicadores de Lagrange son óptimas (λ^*, μ^*) . En otras palabras, el valor óptimo dual tiene el mismo valor que aquel primal.

Sea \hat{f} un PPL sin restricciones de igualdad de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \min_x f(x) \\ \text{s.a.} \quad &g(x) \leq 0 \\ &x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

En donde la función objetivo se define por $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y las restricciones a través de $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; igualmente, el conjunto X es arbitrario, pudiendo haber restricciones integrales. Se introduce el multiplicador de Lagrange $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in I$ (que representa todas las restricciones del problema). Definiendo las variables duales como $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ y el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

La función Lagrangiana se define similar a la sección anterior mediante la expresión:

$$\begin{aligned} L_D(\lambda) &= \min_x L(x, \lambda) \\ &x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

A base de los resultados expuestos en los párrafos anteriores y lo estudiado hasta el momento, se pueden establecer dos colorario:

- Colorario 1: $\hat{f} \geq \max_{\lambda \geq 0} L_D(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in X} L(x, \lambda)$.
- Colorario 2: Si x es factible para el primal y $\lambda \geq 0$, entonces, $f(x) \geq L_D(\lambda)$.

En la Figura 52, se muestra gráficamente la transformación de un PPL primal a su contraparte dual. En el espacio dual H ,

existe un punto (\hat{g}, \hat{y}) que es el mínimo factible del PPL dual y que en el caso de dualidad fuerte debiera entregar un valor óptimo similar a la formulación primal.

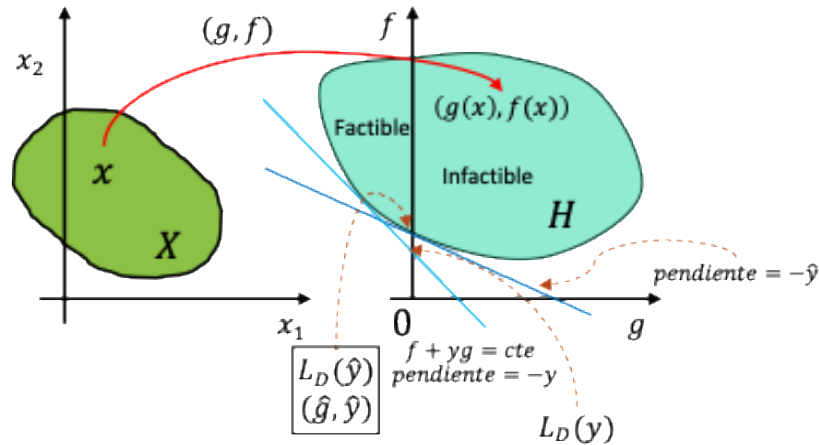


Figura 52.- Relación gráfica del problema primal y dual (elaboración propia).

Por su parte, la recta de color azul claro (lado derecho), representada por $f + yg = cte$, muestra la aproximación dual que “pivotea” a base de la región factible, cambiando de pendiente $-\hat{y}$ hasta alcanzar, idealmente, el punto óptimo dual (\hat{g}, \hat{y}) .

La aproximación entre la solución óptima primal (representada en la Figura 52 por la solución óptima dual $L_D(\hat{y})$) y la solución parcial dual $L_D(y)$, descrita en los dos párrafos anteriores, corresponde a la relación de aproximación de dualidad que se estudiará en esta sección.

Para probar ambos colorarios, es necesario plantearse la siguiente pregunta: si el dual se aproxima por el límite inferior y el primal por el límite superior ¿Cómo se comprueba la relación primal y Lagrangiano?

La función Lagrangiana se define como: $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$.

Observe que:

- Si $\exists i g_i(x) > 0$, entonces: $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = +\infty$

Porque se permitió al correspondiente λ_i crecer hasta $+\infty$.

- Si $\exists i g_i(x) \leq 0$, entonces: $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = f(x)$

Porque $\forall i = 1, 2, \dots, m, \lambda_i \geq 0$, entonces, $\lambda_i g_i \leq 0$, con el máximo cuando $\lambda_i = 0$; por lo que se concluye que, $\forall i = 1, 2, \dots, m, \lambda_i g_i(x) = 0$.

A base de lo analizado, y en consideración a que $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = f(x)$, es factible representar el problema primal en una formulación mín-máx., como sigue:

El problema primal		Problema mín-máx.
$\hat{f} = \min_x f(x)$	es equivalente	$\hat{f} = \min_{x \in X} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$
$\text{s.a. } g(x) \leq 0$	al	
$x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$		

Entonces, las relaciones de dualidad se definen conforme a lo siguiente:

- Dualidad débil se observa si se cumple que:

$$\min_{x \in X} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \geq \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in X} L(x, \lambda)$$

Observe que no se ha hecho ninguna suposición acerca de las funciones f y g , así como el conjunto X hasta el momento.

- Dualidad fuerte se observa si se cumple que:

$$\min_{x \in X} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in X} L(x, \lambda)$$

Hasta el momento, solo se ha definido el término del lado izquierdo de las dos expresiones anteriores. Para definir el lado derecho de dicha expresión de relación dual, recordemos que la función y el problema dual se definen como:

- Función dual: $L_D(\lambda) = \min_x \{L(x, \lambda): x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$
- Problema dual: $L_D(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} \{L_D(\lambda): \lambda \geq 0\}$

Análogamente, es posible definir la función primal y el problema primal, como sigue:

- Función primal: $L_P(x) = \max_{\lambda} \{L(x, \lambda): \lambda \geq 0\}$
- Problema primal: $L_P(\hat{x}) = \min_x \{L_P(x): x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$

Finalmente, las siguientes equivalencias pueden ser obtenidas:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) &\geq \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in X} L(x, \lambda) \\ \min_{x \in X} L_P(x) &\geq \max_{\lambda \geq 0} L_D(\lambda) \\ L_P(\hat{x}) &\geq L_D(\hat{\lambda}) \end{aligned}$$

Problema primal Problema dual

Figura 53.- Relaciones de equivalencia del problema primal y dual (elaboración propia).

Las relaciones de la Figura 53 definen la dualidad débil para un problema de minimización.

Intuitivamente, una solución factible primal cualquiera, para un problema de minimización, entregará un valor de la función objetivo mayor (lado izquierdo) o igual al valor óptimo, es decir,

a lo sumo será tan “bueno” como el óptimo, según el sentido de optimización.

Por otro lado, las soluciones del problema dual (lado derecho) se van a aproximar a la solución primal desde el límite inferior a la solución óptima, en consideración que el dual de un problema primal de minimización es un problema de maximización.

El espacio existente entre la solución primal (no necesariamente la óptima) y la solución dual se denomina brecha de dualidad.

$$\text{Brecha de dualidad} = L_P(\hat{x}) - L_D(\hat{\lambda}) \geq 0$$

Cuando la brecha de dualidad es igual a cero, se obtiene la condición de dualidad fuerte, siendo las mismas equivalencias pertinentes, solo que con un signo de igualdad.

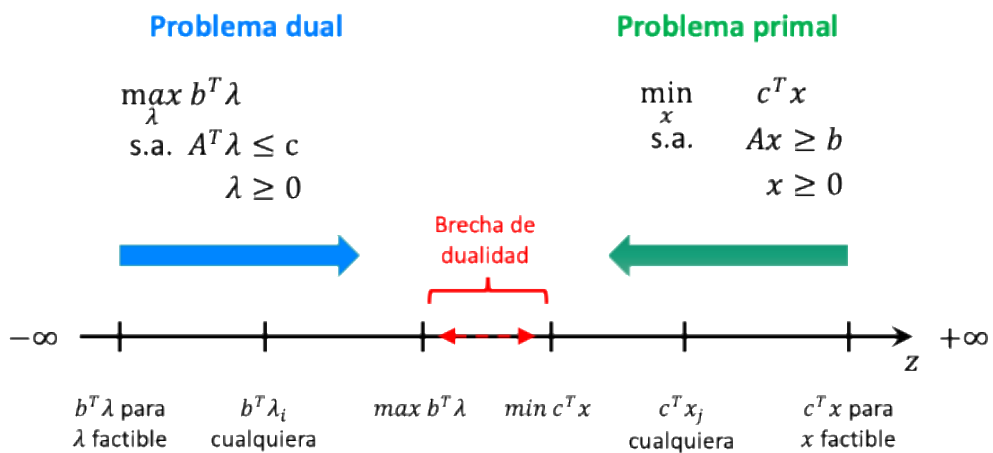


Figura 54.- Síntesis de la convergencia del problema primal y dual (elaboración propia).

En términos generales, cuando el problema primal es convexo (y bajo algunas condiciones adicionales) se puede

garantizar que existirá dualidad fuerte. La Figura 54 sintetiza los conceptos presentados anteriormente:

4.3. Teorema de holguras complementarias (THC)

El teorema de holguras complementarias permite encontrar una solución al problema dual, a base de una solución óptima primal. Su aplicación se sustenta en el también denominado teorema dual y que permite certificar la dualidad fuerte.

4.3.1. Formulación del THC

Sean $x^* \in X$, $y^* \in Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- x^* es solución óptima del problema primal; y^* es solución óptima del problema dual.
- $c^T x^* = b^T y^*$ (teorema dual o dualidad fuerte).
- $(y^*)^T (Ax^* - b) = 0$ y $(x^*)^T (A^T y^* - c) = 0$ (teorema de holguras complementarias).

Nótese que la estructura de ambas expresiones del THC está compuesta por el producto entre la variable dual y la restricción primal y viceversa, siguiendo una estructura similar a cuando se compuso la función de Lagrange.

Por una parte, el teorema dual o dualidad fuerte aseguran que si $x^* \in X$, $y^* \in Y$ corresponden a los puntos óptimos del problema primal y dual, respectivamente, se cumplirá que sus valores óptimos serán iguales:

$$c^T x^* = b^T y^*$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

Por otro lado, el teorema de holguras complementarias señala que, dado $x^* \in X$, $y^* \in Y$, si ambas variables corresponden a puntos que generan una solución factible de un PPL del problema primal y dual, respectivamente, ambas soluciones serán óptimas si:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

En ambos casos, para que se cumpla la igualdad, debe suceder respectivamente que:

- La variable dual (primal) sea igual a cero, o;
- La holgura de la restricción primal (dual) sea igual a cero.

Si la variable de decisión x^* o y^* es igual a cero, implica que la expresión encerrada entre paréntesis, y que corresponde a la restricción, será distinto de cero.

A su vez, lo anterior supone que la restricción no es satisfecha en igualdad y, por ende, se concluye que es una restricción inactiva, no siendo x^* o y^* un punto óptimo, según corresponda, a la expresión de holguras complementaria en análisis. El procedimiento para aplicar el teorema de holguras complementarias es descrito a continuación.

4.3.2. Procedimiento del THC

El valor óptimo del PPL primal es igual al valor óptimo del PPL dual si el PPL es convexo. En programación lineal, debido a la naturaleza de la función objetivo y de las restricciones, las que definen la región de soluciones factibles, el PPL es convexo. El siguiente procedimiento sintetiza las tareas a desarrollar para aplicar el teorema de holguras complementarias:

- Paso 1: plantear el modelo de optimización (PPL) primal.
- Paso 2: resolver el PPL primal y obtener el punto óptimo y valor óptimo.
- Paso 3: plantear el modelo de optimización (PPL) dual.
- Paso 4: aplicar el teorema de holguras complementarias a cada restricción del PPL primal y determinar qué *variable dual* es igual a cero ($= 0$) y cual es distinta de cero ($\neq 0$). Si la *variable dual* $\neq 0$ para dicha restricción, significa que es activa para el PPL primal.

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \forall i \in I$$

- Paso 5: aplicar el teorema de holguras complementarias a cada restricción del PPL dual y determinar qué *variable primal* es igual a cero ($= 0$) y cual es distinta de cero ($\neq 0$).

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i^* - c_j \right) = 0, \forall j \in J$$

- Paso 6: obtener el valor de las *variables duales* por sustitución en las distintas ecuaciones del teorema de holguras complementarias.

- Paso 7: determinar el valor óptimo del problema dual al reemplazar las *variables duales* en la función objetivo dual.
- Paso 8: eventualmente, la función objetivo, a base del teorema dual, servirá para obtener alguna de las *variables duales*.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

4.3.3. Aplicación del THC

Para facilitar la comprensión del teorema de holguras complementarias, se utilizará el ejemplo empleado en el capítulo de análisis de sensibilidad. Sea el problema primal definido por (paso 1):

$$\begin{array}{ll} \max_x & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a:} & x_1 \leq 180 \\ & 2x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

En el cual, se obtiene como punto óptimo primal = $(x_1^* = 50; x_2^* = 75)$ y su valor óptimo primal = 525 (paso 2).

Luego, se procede a transformar la formulación primal en el dual, conforme a la regla de conversión máx.-mín., obteniéndose lo siguiente (paso 3):

$$\begin{array}{ll} \min_y & 180y_1 + 150y_2 + 300y_3 \\ \text{Sujeto a:} & y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \end{array}$$

A base de las restricciones primales y las variables duales (incógnita), se procede a determinar cuales de dichas variables duales son iguales a cero y distintas a cero, conforme a lo siguiente:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \forall i \in I \quad \text{con } x_1^* = 50 \text{ y } x_2^* = 75$$

En la Figura 55, se muestra el proceso de cálculo de cada holgura a base de la expresión anterior (paso 4):

$y_1^*(x_1^* - 180) = 0$ <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid red;"/> <p style="text-align: center;">si $x_1^* = 50$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> $(x_1^* - 180) \neq 0$ \wedge $y_1^* = 0$ Restricción no activa o redundante	$y_2^*(2x_2^* - 150) = 0$ <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid red;"/> <p style="text-align: center;">si $x_2^* = 75$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> $(2x_2^* - 150) = 0$ \wedge $y_2^* \neq 0$ Restricción activa	$y_3^*(3x_1^* + 2x_2^* - 300) = 0$ <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid red;"/> <p style="text-align: center;">si $x_1^* = 50 \wedge x_2^* = 75$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> $(3x_1^* + 2x_2^* - 300) = 0$ \wedge $y_3^* \neq 0$ Restricción activa
--	--	--

Figura 55.- Cálculo de holguras de restricciones del primal (elaboración propia).

Conocida ya la naturaleza de las restricciones primales y las variables duales, se procede a realizar el cálculo de las holguras de las restricciones del dual, conforme a la siguiente expresión (paso 5):

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i^* - c_j \right) = 0, \forall j \in J \quad \text{con } x_1^* = 50, x_2^* = 75, y_1^* = 0$$

En la Figura 56, se muestra el proceso de cálculo de cada holgura a base de las restricciones duales, para la obtención de las variables duales (paso 6):

$\underbrace{x_1^*(y_1^* + 3y_3^* - 3) = 0}$ $\text{si } x_1^* = 50 \wedge y_1^* = 0$ \Downarrow $3y_3^* - 3 = 0$ \Downarrow $y_3^* = 1$ <p>Restricción (dual) activa</p>		$\underbrace{x_2^*(2y_2^* + 2y_3^* - 5) = 0}$ $\text{si } x_2^* = 75 \wedge y_3^* = 1$ \Downarrow $2y_2^* + 2 \cdot 1 - 5 = 0$ \Downarrow $y_2^* = 1,5$ <p>Restricción (dual) activa</p>
--	--	---

Figura 56.- Cálculo de holguras de restricciones del dual (elaboración propia).

Una vez obtenidas las soluciones primal y dual, con valores $x_1^* = 50$; $x_2^* = 75$ y $y_1^* = 0$; $y_2^* = 1,5$; $y_3^* = 1$, respectivamente, se procede a utilizar el teorema dual (dualidad fuerte) para comprobar que los valores óptimos son iguales:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

$$3x_1^* + 5x_2^* = 180y_1^* + 150y_2^* + 300y_3^*$$

$$525 = 180 \cdot 0 + 150 \cdot 1,5 + 300 \cdot 1 = 225 + 300 = 525$$

Se comprueba que existe dualidad fuerte, ya que ambos valores óptimos coinciden.

4.4. Relación entre dualidad y análisis de sensibilidad

En el análisis de sensibilidad, específicamente en el análisis del coeficiente de disponibilidad de recursos (lado derecho de la restricción), la variación de una unidad de recurso disponible i , asociado a dicha restricción, genera una variación en el valor óptimo, lo que se denomina precio dual o precio sombra.

PRIMAL

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & x_1 \leq 180 \quad | \quad \text{Precio dual restricción 1} = 0,0 \\ & \quad \quad 2x_2 \leq 150 \quad | \quad \text{Precio dual restricción 2} = 1,5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \quad | \quad \text{Precio dual restricción 3} = 1,0 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto óptimo = (x₁ = 50 ; x₂ = 75) / Valor óptimo primal = 525

Figura 57.- Solución primal del ejemplo de análisis de sensibilidad (elaboración propia).

La Figura 57 presenta el resultado del ejemplo utilizado en el análisis de sensibilidad, mostrándose la solución óptima y los precios duales o sombra de cada restricción.

Al reformular el PPL presentado anteriormente y aplicado el teorema de las holguras complementarias (sección anterior), se conoce que el punto óptimo dual coincide con el precio dual o sombra de las restricciones del primal.

Al calcular el precio dual o sombra de las restricciones del dual, se obtienen como valores 50 y 75, respectivamente, lo que a su vez coincide con el valor del punto óptimo del primal, como se muestra en la Figura 58.

DUAL

$$\begin{aligned} \min_y \quad & 180y_1 + 150y_2 + 300y_3 \\ \text{Sujeto a:} \quad & y_1 + \quad \quad 3y_3 \geq 3 \quad | \quad \text{Precio dual restricción 1} = 50 \\ & \quad \quad 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \quad | \quad \text{Precio dual restricción 2} = 75 \\ & y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto óptimo = (y₁ = 0 ; y₂ = 1,5 ; y₃ = 1) / Valor óptimo dual = 525

Figura 58.- Solución dual del ejemplo de análisis de sensibilidad (elaboración propia).

Consecuentemente, se concluye que los precios duales o sombra que se obtienen a base del análisis de sensibilidad son

equivalentes al valor de las variables de decisión duales de su contraparte dual y viceversa.

Entonces, la interpretación económica del análisis de sensibilidad, a base de los precios duales o sombras, puede ser también realizados mediante la reformulación del problema en su contraparte dual.

4.5. Interpretación económica de la dualidad

Considere un problema de optimización primal de maximización, en el cual se desea obtener la mayor utilidad posible derivada de la producción de un elemento determinado. No obstante, existe una disponibilidad de recursos específica y un consumo de estos recursos, por materia prima. Se definen los siguientes elementos del PPL:

- Variable de decisión: x_j cantidad de producto de tipo j producido. Se mide en número de elementos j (# elementos j).
- Consumo por materia prima: a_{ij} consumo de materia prima i utilizado para la producción del producto j . Se mide en unidades de recurso i dividido por cada producto j .
- Utilidad por producto producido: c_j utilidad de cada producto j producido. Se mide por el ingreso en \$ dividido por cada producto j producido.

Sea d la función dual de un PPL. Haciendo un análisis dimensional del problema dual, se tiene que:

$$d = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\$ = [\textit{unidades del recurso } i] * y_i$$

$$y_i = \frac{\$}{[\textit{unidades del recurso } i]}$$

Entonces, la variable dual es el precio o costo \$ que se deriva al incorporar una unidad de recurso *i*. Por lo tanto, a base de la desigualdad de dualidad para un problema primal (*p*) de maximización de la forma:

$$p = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = D$$

La desigualdad $p \leq d$ que se presenta arriba, se puede interpretar de la siguiente forma:

$$p \leq d$$

Utilidad ≤ Valor de los recursos

Ambas soluciones (primal y dual) serán óptimas solo cuando se alcance la igualdad, es decir, la optimalidad se alcanza cuando los recursos han sido explotados por completo. Esto sucede cuando se logra transformar los recursos usados a una utilidad del proceso productivo a ser obtenida.

Por otra parte, dada la restricción dual de la forma:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Al realizar un análisis dimensional de dicha restricción, se tiene que:

$$\frac{[\text{unidades recurso } i]}{[\text{producto } j]} \cdot \frac{\$}{[\text{unidades recurso } i]} = \frac{\$}{[\text{producto } j]} \quad \forall j \in J$$

costo = ingreso

Por lo tanto, se puede definir un nuevo concepto denominado *costo imputado* y_i por unidad del recurso i . Entonces, el lado izquierdo de la restricción dual se define como:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \quad : \quad \text{Costo imputado de todos los recursos para producir una unidad del producto } j.$$

Además, la expresión compuesta por la diferencia entre el costo imputado de todos los recursos y el ingreso o utilidad por cada producto c_j , se denomina *costo reducido* de la actividad j y se representa por:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

En relación con estos nuevos conceptos, se profundizará en el próximo capítulo del método Simplex.

5. MÉTODO SIMPLEX

El concepto simplex corresponde a una forma geométrica de cuatro dimensiones o más, la cual no puede ser representada en el plano o en el espacio. Concretamente, generaliza la representación de un tetraedro o un triángulo en dimensiones arbitrariamente definidas, desde 1 hasta n . Por ejemplo, en una dimensión, un simplex representa una recta, en dos dimensiones corresponde a un triángulo y en tres dimensiones a un tetraedro.

El método Simplex fue desarrollado por el matemático George Dantzig en 1947, el que permite resolver problemas de programación lineal mayores a tres variables de manera eficiente (también puede ser utilizado en problemas de menos dimensiones).

El método Simplex funciona de la siguiente forma:

- Comenzar desde un punto extremo de la región de soluciones factibles (solución factible básica).
- Buscar un punto extremo adyacente con el cual el valor de la función objetivo evaluada en un punto extremo sea “mejor” o igual.
- Continuar hasta encontrar la solución óptima (punto y valor) o converger al infinito (en el caso de soluciones no acotadas).

El método Simplex será abordado mediante dos fases:

- Fase I: tiene como propósito encontrar una primera solución factible; de no encontrarla, se inducirá que el problema no tiene soluciones factibles.
- Fase II: tiene como propósito encontrar la solución óptima única, un conjunto de soluciones múltiples o determinar que el PPL no está acotado. Utiliza al resultado de la Fase I como inicio del proceso.

No obstante, se comenzará aplicando el algoritmo de la fase II para resolver todo problema de PPL. En el caso que la fase II indique que no existe una solución factible de inicio, se recurrirá a la fase I.

Cabe recordar que una solución factible es aquella que satisface todas las restricciones del problema, ya sea en igualdad como en desigualdad. La solución factible satisfecha como igualdad es una solución óptima.

Además, las soluciones factibles, en el caso de los PPL están constituidos por los puntos extremos y, eventualmente, por las fronteras de la región.

5.1. Simplex fase II

El método Simplex consiste en avanzar a través de los vértices de la región de soluciones factibles hasta encontrar la solución óptima. Por lo tanto, el algoritmo asume que inicia las iteraciones en el primer vértice factible $\vec{0}$ (vector de n-dimensiones), correspondiente al origen del espacio de coordenadas.

Para el método Simplex fase II, una condición necesaria es que el vértice correspondiente al origen del espacio de coordenadas esté contenido como punto extremo en el polígono o región de soluciones factibles.

De caso contrario, la evaluación de ese punto en el algoritmo Simplex fase II indicará que no es posible aplicar el método, ya que dicho punto no está contenido en el espacio de soluciones factibles, no pudiendo avanzar a otro punto extremo.

De ocurrir este caso, se aplicará el método Simplex fase I, con el propósito que situar el punto de inicio del método en uno de los puntos extremos de la región de soluciones factibles y así continuar con la fase II.

Por lo tanto, el método Simplex fase II se aplica cuando la región de soluciones factibles contiene como punto extremo al origen del eje de coordenadas que define esa región.

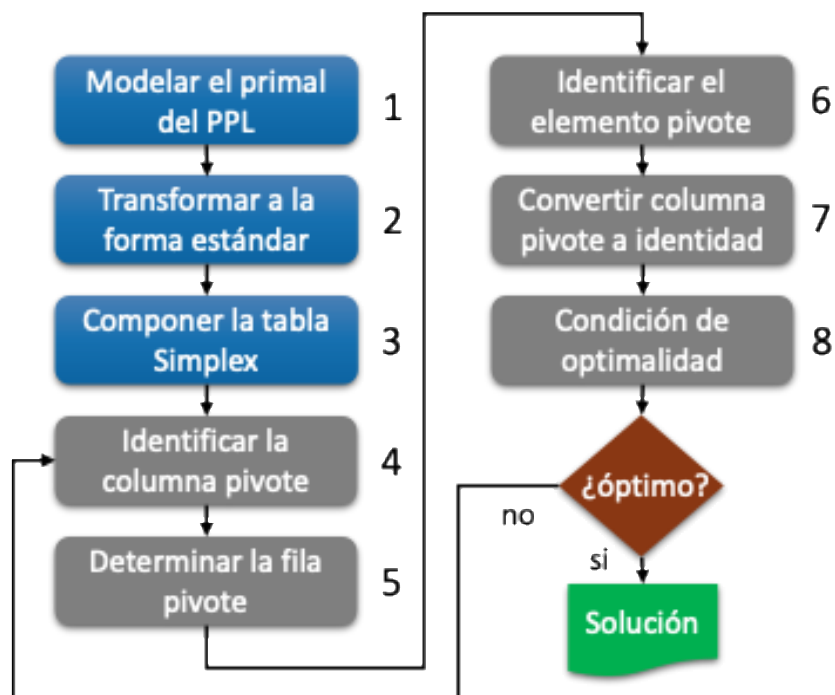


Figura 59.- Proceso del método Simplex fase II (elaboración propia).

A fin de hacer más intuitiva la comprensión del método Simplex fase II, se utilizará un ejemplo a base de un procedimiento de ocho pasos, en el cual, a partir del cuarto paso comienza un proceso iterativo (Figura 59).

Los primeros tres pasos, señalado con fondo azul, corresponden a pasos que se ejecutan exclusivamente al inicio del proceso. Posteriormente, los cinco pasos siguientes, en fondo

gris, son aquellos que se desarrollan iterativamente hasta encontrar la solución óptima, marcada en color verde.

5.1.1. Modelar el primal del PPL

El primal de un PPL es obtenido mediante un proceso de modelación matemática (paso 1). Para efectos de este capítulo, se procederá a utilizar un modelo simple, como sigue:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5.1.2. Transformar el PPL a la forma estándar

El PPL se transforma en un problema de minimización. Igualmente, las restricciones se satisfacen en igualdades agregando las variables de holgura o de exceso, según corresponda (paso 2). De esta forma, independiente a los signos de las variables de decisión, se tiene el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x,h} \quad & -2x_1 - 3x_2 + 0h_1 + 0h_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 + h_1 = 8 \\ & -2x_1 + 3x_2 + h_2 = 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5.1.3. Componer la tabla Simplex

La tabla Simplex corresponde a una matriz en la cual se reemplazan los coeficientes (parámetros) que acompañan a las variables de decisión en el mismo orden que tiene el modelo (paso

3). Se comienza colocando, por filas, las restricciones y al final los coeficientes de la función objetivo, como se muestra a continuación (Figura 60):

		x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
Variables Básicas	h_1	1	1	1	0	8
	h_2	-2	3	0	1	12
FO		-2	-3	0	0	0

Figura 60.- Tabla Simplex fase II – paso 3 (elaboración propia).

Las variables básicas (color rojo) son aquellas que constituyen una matriz de identidad en la tabla simplex. Dichas variables integran la base de la tabla o matriz, la que se caracteriza por contener a las variables que adoptan un valor distinto a cero. Las que no cumplen con ello, se denominan variables no-básicas (color verde).

Complementariamente, las variables básicas son aquellas que componen el punto extremo en el cual se sitúa el punto de inicio del método Simplex, independiente a que adopten el valor cero del origen.

En este caso, adoptan los valores $h_1 = 8$ y $h_2 = 12$, respectivamente, debido a que el punto de inicio Simplex se sitúa en el origen y las variables básicas corresponden a las variables de holgura. Las variables no-básicas, adoptan un valor cero, por defecto ($x_1 = 0$ y $x_2 = 0$).

Los coeficientes que acompañan a las variables de decisión y que se encuentran en la última fila se denominan costos reducidos.

Nótese que dichos coeficientes corresponden a aquellos de la función objetivo, la que se representa de la siguiente forma en la tabla Simplex: $z - (c^T x) = 0$, lo que reemplazado con los datos del problema es equivalente a $z - (-2x_1 - 3x_2 - 0h_1 - 0h_2) = 0$.

Entonces, en la tabla Simplex se registrará un valor equivalente a la expresión $-(-2x_1 - 3x_2 - 0h_1 - 0h_2)$, el que será positivo para Simplex fase II (problema de maximización) y se obtendrá en dicha condición automáticamente producto de la aplicación del algoritmo.

El procedimiento busca seleccionar variables no-básicas (fuera de la solución) e integrarlas a la base, en desmedro de las variables básicas, reemplazándolas conforme al criterio del mayor costo-beneficio.

5.1.4. Identificar la columna pivote

Este paso corresponde al primero que se desarrolla al interior del ciclo iterativo (paso 4 – iteración 1). La identificación de la columna pivote se realiza al seleccionar el costo reducido menor, dentro de aquellos con signo negativo.

El motivo de aquello es que el coeficiente de menor valor en un problema de minimización de la forma estándar es el más alto de los costos reducidos del problema original de maximización y aquel que mejorará más rápidamente el valor de la función objetivo.

La Figura 61 muestra la tabla Simplex con la columna pivote seleccionada:

		x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
Variables Básicas	h_1	1	1	1	0	8
	h_2	-2	3	0	1	12
FO		-2	-3	0	0	0




Figura 61.- Tabla Simplex fase II – paso 4/iteración 1 (elaboración propia).

La selección se realiza con las variables no-básicas, dentro de las cuales se selecciona aquella que tenga el coeficiente más bajo. La columna correspondiente se denomina “columna pivote” (marcada con una flecha azul y correspondiente a x_2).

Lo anterior, significa que la columna 2 (asociada a la variable x_2) ingresará a las variables básicas, en reemplazo de algunas que actualmente componen “la base”. Al criterio de ingreso a la base, se le denomina “criterio de entrada”.

5.1.5. Determinar la fila pivote

La determinación de la fila pivote se realiza con el propósito de identificar la variable que integra la base y que tiene el menor beneficio para la función objetivo (paso 5 – iteración 1).

Se divide el término libre b_i por la constante a_{i2} de la “columna pivote”. Solo se consideran las constantes $a_{i-pivote} > 0$ para el cálculo del cociente. Se elige el cociente con un menor valor para constituir la “fila pivote” (Figura 62). El concepto de fila pivote proviene de que las filas de la matriz representan las variables básicas del problema y que se reemplazarán con las no-básicas. Para las siguientes iteraciones $q_i^{Iter/2} \leftarrow q_i^{Iter/1} / a_{ij}$.

		x_1	x_2	h_1	h_2	b_i	$q_i^1 = b_i/a_{i2}$
Variables Básicas	h_1	1	1	1	0	8	$8/1 = 8$
	h_2	-2	3	0	1	12	$12/3 = 4$
FO		-2	-3	0	0	0	

Figura 62.- Tabla Simplex fase II – paso 5/iteración 1 (elaboración propia).

El procedimiento de cálculo de q se presenta a continuación:

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{8}{1} = 8 \qquad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{12}{3} = 4$$

5.1.6. Identificar el elemento pivote

El elemento pivote corresponde al coeficiente que intercepta la fila pivote y la columna pivote (paso 6 – iteración 1). La particularidad de dicho elemento es que deberá adoptar el valor 1 en el PASO 7, y el resto de la columna valor 0, es decir, al entrar la variable de la columna pivote a la base, deberá adoptar el formato de vector identidad con el valor del elemento pivote igual a uno. La Figura 63 muestra la identificación del elemento pivote, el que corresponde al coeficiente $a_{22} = 3$.

		x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
Variables Básicas	h_1	1	1	1	0	8
	h_2	-2	3	0	1	12
FO		-2	-3	0	0	0

Figura 63.- Tabla Simplex fase II – paso 6/iteración 1 (elaboración propia).

5.1.7. Convertir columna pivote a identidad

La conversión de la columna que ingresa a la base (la 2da) se realiza mediante eliminación por combinaciones lineales entre restricciones (paso 7 – iteración 1). La columna que ingresa a la base debe quedar en formato “identidad” (1 y 0s).

El proceso se inicia al aplicar las transformaciones lineales necesarias en la fila pivote, a fin de dejar el elemento pivote con un valor igual a uno. La Figura 64 muestra la tabla Simplex y el proceso de cálculo de la fila pivote (2da fila, en color rojo):

		x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
Variables Básicas	h_1	1	1	1	0	8
	h_2	-2	3	0	1	12
FO		-2	-3	0	0	0

$$\text{FILA PIVOTE} = \frac{F2}{a_{i-\text{pivote}}}$$

↓

FILA 2 NUEVA (F2N)

x_1	x_2	h_1	h_2	q_i^1
-2/3	3/3	0/3	1/3	12/3
-2/3	1	0	1/3	4

Figura 64.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 1 – fila pivote (elaboración propia).

Posteriormente, se procede a transformar la fila 1, de tal forma que el elemento de dicha fila, que se sitúa en la intersección con la columna pivote (intersección h_1 con x_2 y que tiene valor igual a uno), adopte un valor igual a cero. La Figura 65 muestra el proceso de cálculo de la fila 1 (fila con línea segmentada).

Finalmente, para obtener la columna pivote en formato identidad, se deben aplicar las combinaciones lineales a la fila 3, de tal forma que el costo reducido de menor valor negativo (-3)

adopte un valor igual a cero. La Figura 66 presenta el proceso correspondiente (fila con línea segmentada).

La tabla Simplex, una vez aplicadas las transformaciones lineales anteriormente comentadas, queda de la forma que se muestra en la Figura 67.

		x_1	x_2	h_1	h_2	q_i^1
Variables Básicas	h_1	1	1	1	0	8
	h_2	-2/3	1	0	1/3	4
FO		-2	-3	0	0	0

$$\text{FILA 1 NUEVA} = F1 - 1 * F2N$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	q_i^1
	$1-1*2/3$	$1-1*1$	$1-1*0$	$0-1*1/3$	$8-1*4$
	5/3	0	1	-1/3	4

Figura 65.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 1 – fila 1 (elaboración propia).

		x_1	x_2	h_1	h_2	q_i^1
Variables Básicas	h_1	5/3	0	1	-1/3	4
	h_2	-2/3	1	0	1/3	4
FO		-2	-3	0	0	0

$$\text{FILA 3 NUEVA} = F3 + 3 * F2N$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	q_i^1
	$-2+3*2/3$	$-3+3*1$	$0+3*0$	$0+3*1/3$	$0+3*4$
	-4	0	0	1	-12

Figura 66.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 1 – fila 3 (elaboración propia).

		x_1	x_2	h_1	h_2	q_i^1
Variables Básicas	h_1	5/3	0	1	-1/3	4
	x_2	-2/3	1	0	1/3	4
FO		-4	0	0	1	12

Figura 67.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 1 – final (elaboración propia).

La columna marcada en color morado en la Figura 67 (columna pivote al inicio del paso 7) quedó en el formato identidad debido a que la variable de decisión x_2 ingresó a la base y la variable h_2 salió de ella. El nuevo punto factible, indicado por las variables básicas, es igual a ($x_1 = 0, x_2 = 4$), con holguras iguales a ($h_1 = 4, h_2 = 0$).

A modo didáctico, se reordenarán las variables de decisión (columnas) dentro de la tabla Simplex, a fin de dejar la base a la derecha de la matriz, como se muestra en la Figura 68:

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^1
Variables Básicas	h_1	5/3	-1/3	1	0	4
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4
FO		-4	1	0	0	12

Figura 68.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 1 – reordenado (elaboración propia).

5.1.8. Condición de optimalidad

La condición de optimalidad en el método Simplex estará dada por tener la totalidad de los coeficientes de la función objetivo (costos reducidos – última fila) no negativos (paso 8 –

iteración 1). Si existe alguno negativo, significa que aún hay oportunidad de mejorar.

Al analizar los datos de la tabla Simplex, se evidencia que el costo reducido de la columna asociada a la variable no-básica x_1 es negativo, por lo que la condición de optimalidad no se cumple (Figura 69).

Consecuentemente, la solución propuesta ($x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $h_1 = 4$, $h_2 = 0$, con un valor de la función objetivo de 12) no es el óptimo, debiéndose iniciar la iteración 2, a partir del paso 4. Para efectos didácticos, la 2da iteración se realizará en la siguiente sección de forma sintetizada.

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^1
Variables Básicas	h_1	5/3	-1/3	1	0	4
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4
FO		-4	1	0	0	12

Figura 69.- Tabla Simplex fase II – paso 8/iteración 1 (elaboración propia).

5.1.9. Iteración 2 método Simplex fase II

En consideración a que no se obtuvo la solución óptima, se inicia la 2da iteración con el paso 4, tomando como tabla inicial aquella presentada en Figura 70.

- Iteración 2 – paso 4:

La selección se realiza con las variables no-básicas; la cual tenga el coeficiente negativo más bajo. La columna correspondiente se denomina “columna pivote”. Lo anterior, significa que la columna 1 (asociada a la variable x_1)

ingresará a las variables básicas, en reemplazo de algunas que actualmente componen “la base”. En el caso de haber dos variables iguales, se elige indiferentemente una de ellas.

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^1
Variables Básicas	h_1	5/3	-1/3	1	0	4
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4
FO		-4	1	0	0	12

Figura 70.- Tabla Simplex fase II – paso 4/iteración 2 (elaboración propia).

- Iteración 2 – paso 5:

Se divide el término $q_i^{Iter/1}$ por la constante a_{i1} de la “columna pivote”. Solo se consideran las constantes $a_{i-pivote} > 0$ para el cálculo del cociente. Se elige el cociente ($q_i^{Iter/2}$) con un menor valor para constituir la “fila pivote”. El procedimiento de cálculo de la fila pivote se presenta a continuación:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{4}{\frac{5}{3}} = \frac{12}{5}$$

La Figura 71 presenta los valores asociados a la columna y fila pivote:

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^1	$q_i^2 = q_i^1/a_{i2}$
Variables Básicas	h_1	5/3	-1/3	1	0	4	$4/(5/3) = 12/5$
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4	$a_{21} < 0$
FO		-4	1	0	0	12	

Figura 71.- Tabla Simplex fase II – paso 5/iteración 2 (elaboración propia).

Entonces, la variable de entrada a la base es x_1 y la que sale de la base es h_1 .

- Iteración 2 – paso 6:

El elemento pivote se determina a base de la intersección entre la fila (marco rojo) y columna pivote (marco azul), conforme a la Figura 72:

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^1	q_i^2
Variables Básicas	h_1	5/3	-1/3	1	0	4	$4/(5/3) = 12/5$
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4	$a_{21} < 0$
FO		-4	1	0	0	12	


Figura 72.- Tabla Simplex fase II – paso 6/iteración 2 (elaboración propia).

El elemento pivote corresponde al coeficiente $a_{11} = \frac{5}{3}$.

- Iteración 2 – paso 7:

La transformación de la matriz, a fin de que la fila pivote (fila con línea roja) quede con el elemento pivote con valor igual a uno, se presenta en la Figura 73:

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^1	q_i^2
Variables Básicas	h_1	5/3	-1/3	1	0	4	$4/(5/3) = 12/5$
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4	$a_{21} < 0$
FO		-4	1	0	0	12	

FILA PIVOTE = $\frac{F1}{a_{i-pivote}}$  **FILA 1 NUEVA (F1N)** para lo que sigue.

	x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^2
	$(5/3)/(5/3)$	$(-1/3)/(5/3)$	$1/(5/3)$	$0/(5/3)$	$(4)/(5/3)$
	1	-1/5	3/5	0	12/5

Figura 73.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 2 – fila 1 (elaboración propia).

Igualmente, la transformación de los elementos de la fila 2 (fila con línea segmentada), considerando que el elemento común con la columna pivote que debe adoptar un valor igual a cero, es el siguiente (Figura 74):

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^2
Variables Básicas	h_1	1	-1/5	3/5	0	12/5
	x_2	-2/3	1/3	0	1	4
FO		-4	1	0	0	12

$$\text{FILA 2 NUEVA} = F2 + \frac{2}{3} * F1N$$

x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^2
$-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} * 1$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} * -\frac{1}{5}$	$0 + \frac{2}{3} * \frac{3}{5}$	$1 + \frac{2}{3} * 0$	$4 + \frac{2}{3} * \frac{12}{5}$
0	1/5	2/5	1	28/5

Figura 74.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 2 – fila 2 (elaboración propia).

La transformación de la tercera fila (fila con línea segmentada), correspondiente a la función objetivo (costos reducidos), se muestra en la Figura 75.

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^2
Variables Básicas	h_1	1	-1/5	3/5	0	12/5
	x_2	0	1/5	2/5	1	28/5
FO		-4	1	0	0	12

$$\text{FILA 3 NUEVA} = F3 + 4 * F1N$$

x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^2
$-4 + 4 * 1$	$1 + 4 * -\frac{1}{5}$	$0 + 4 * \frac{3}{5}$	$0 + 4 * 0$	$12 + 4 * \frac{12}{5}$
0	1/5	12/5	0	108/5

Figura 75.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 2 – fila 3 (elaboración propia).

La tabla final, configurada con la nueva variable básica x_1 , es la siguiente (Figura 76):

		x_1	h_2	h_1	x_2	q_i^2
Variables Básicas	x_1	1	-1/5	3/5	0	12/5
	x_2	0	1/5	2/5	1	28/5
FO		0	1/5	12/5	0	108/5

Figura 76.- Tabla Simplex fase II – paso 7/iteración 2 reordenado (elaboración propia).

- Iteración 2 – paso 8:

Recordando el procedimiento, la solución entregada por la tabla Simplex es óptima cuando los coeficientes de costo reducido son no negativos.

En este caso, son todos los coeficientes de costos reducidos asociados a las variables no-básicas positivos, lo que indica que se alcanzó el punto óptimo.

El punto óptimo es $x_1 = 12/5$, $x_2 = 28/5$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, con un valor óptimo igual a $z = 108/5$. En la Figura 77, se presenta la tabla final Simplex con el resultado óptimo.

		h_2	h_1	x_1	x_2	q_i^2
Variables Básicas	x_1	-1/5	3/5	1	0	12/5
	x_2	1/5	2/5	0	1	28/5
FO		1/5	12/5	0	0	108/5

Figura 77.- Tabla Simplex fase II – paso 8/iteración 2 (elaboración propia).

Asimismo, la Figura 78 muestra una representación gráfica de la solución del problema.

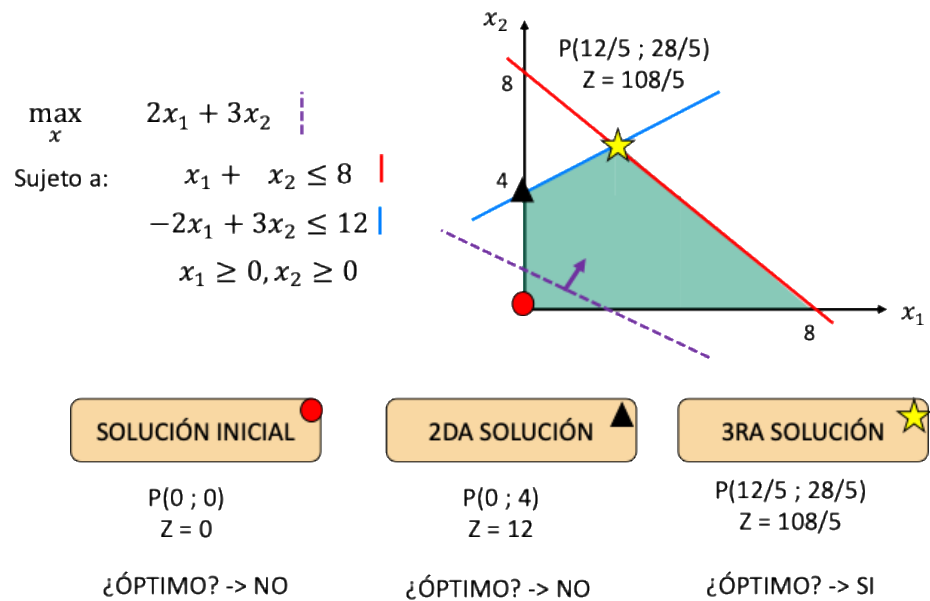


Figura 78.- Resultado gráfico del método Simplex (elaboración propia).

5.1.10. Consideraciones Simplex fase II

El Simplex fase II supone, como condición de inicio, que el punto inicial de iteraciones, correspondiente al origen del eje de coordenadas, es un punto extremo o vértice de la región de soluciones factibles.

Si esa suposición se cumple, el punto de inicio del método Simplex será factible y se podrá iniciar la secuencia de operaciones conforme a lo que describe su algoritmo.

En el caso en que el origen no constituya un punto extremo de la región de soluciones factibles, la evaluación que realizará el método a partir de dicho punto inicial será de no factibilidad, no pudiéndose continuar con el método Simplex fase II.

La solución para sortear dicha infactibilidad temporal es también el método Simplex, pero aplicando una fase I, que será luego estudiada en la próxima sección.

Independiente a lo anterior, la fase II de este método, a través de la tabla Simplex, entrega información valiosa para el análisis del PPL, según lo que se muestra en la Figura 79.

		h_2	h_1	x_1	x_2	q_i^{it}
Variables Básicas	x_1	-1/5	3/5	1	0	Punto óptimo
	x_2	1/5	2/5	0	1	
FO		Precio dual o sombra (con holguras o excesos)		Costo reducido (con variables de decisión)		Valor óptimo

Figura 79.- Antecedentes que entrega la tabla Simplex (elaboración propia).

En la última columna de la matriz se presentan los valores que adoptan las variables básicas (en rojo), identificadas por su estructura de vector columna identidad. Igualmente, la intersección de la última fila con la última columna entrega el valor de la función objetivo evaluado en el punto de las variables básicas (en azul).

Luego, la última fila entrega los valores de los precios sombra que tiene cada restricción, asociado a las variables de holgura o de exceso, según corresponda, y que se derivan de las variables no-básicas. Si una variable de decisión, que no sea de holgura o de exceso, es de tipo no-básica al término de las iteraciones del método, dicho valor de la última fila constituye el costo reducido, es decir, el precio sombra de una restricción del eje de coordenadas.

Por ejemplo, en el caso analizado, las variables básicas $x_1 = 12/5$ y $x_2 = 28/5$ son la solución del problema y las variables no-básicas, por defecto, toman el valor $h_1 = 0$ y $h_2 = 0$, ya que no están en la base. No obstante, el precio dual o sombra de la

restricción 1, asociada a la variable de holgura h_1 es igual a $12/5$ y aquel de la restricción 2 es igual a $1/5$. El valor óptimo corresponde a $108/5$ y que se puede obtener reemplazando las variables básicas y no-básicas en la función objetivo o simplemente a través de las iteraciones del método ya estudiado.

Igualmente, dado que el problema fue resuelto en optimalidad, se sabe que el valor óptimo primal coincide con el valor óptimo dual (teorema dual).

Sin embargo, no es necesario aplicar el teorema de las holguras complementarias para calcular el punto óptimo asociado a las variables de decisión duales, ya que dicho valor es el que entrega el precio dual o sombra de la última fila de la tabla Simplex, correspondiente a $y_1 = 12/5$ e $y_2 = 1/5$ (asumiendo las variables de decisión dual con la letra y).

5.1.11. Síntesis del método Simplex fase II

A modo de resumen y a fin de unificar el procedimiento a seguir en las próximas etapas, el método Simplex fase II se puede sintetizar en los siguientes 8 pasos:

- Modelar el problema planteado como un PPL.
- Convertir la formulación del PPL a una forma estándar.
- Construir la tabla Simplex. Las *variables de holgura* h_i estructuran una matriz identidad y se denominan variables básicas, las que constituyen “la base”. Las variables que no componen la matriz identidad (base) se denominan variables no básicas.
- Seleccionar la columna con el valor de coeficiente c_j negativo de más bajo valor. Dicha columna se denomina “*columna*”

pivote". Dicha columna identifica a la variable no básica que entrará a la base.

- Obtener el cociente entre el término libre b_i y la constante a_{ij} , donde j corresponde a la *columna pivote*. Luego, se selecciona la fila con el cociente de menor valor. Esta fila se denomina "*fila pivote*". Entonces, $b_i/a_{i-pivote}$, donde $a_{i-pivote} > 0$. Dicha fila identifica a la variable básica que saldrá de la base.
- Identificar el *elemento pivote*, correspondiente al elemento generado por la intercepción entre la *columna* y *fila pivote*.
- Convertir la *columna pivote* a una estructura de matriz identidad, donde el *elemento pivote* debe tomar valor igual a 1 y el resto de los elementos igual a 0.
- Identificar la condición de optimalidad. Si todos los coeficientes c_j son no negativos, se alcanzó una solución óptima. En caso contrario, se retoma el proceso nuevamente en el paso 4.

5.2. Simplex fase I

El método Simplex fase I corresponde a un mecanismo para dar solución al problema de "no factibilidad" de origen, lo que es especialmente aplicable para los problemas de minimización.

Por ejemplo, sea un PPL de minimización de dos variables de decisión y dos restricciones de la forma:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Al llevar dicho problema a su forma estándar, es necesario agregar dos variables de exceso, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{x,e} \quad & 2x_1 + x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 - e_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Llama la atención que no fue necesario cambiar el sentido de la función objetivo, ya que inicialmente estaba en sentido de minimización, manteniéndose dichos coeficientes positivos. Lo anterior, impactará en que el valor evaluado de la función objetivo será negativo ($\max f = -\min f$) en la tabla Simplex. Igualmente, las variables de exceso tienen signo negativo, lo que impactará en la conformación de la tabla Simplex, como se muestra en la Figura 80.

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
e_1	1	1	-1	0	3
e_2	1	2	0	-1	4
FO	2	1	0	0	0

Figura 80.- Tabla Simplex de un PPL de minimización (elaboración propia).

Primeramente, dicha tabla no permite iniciar las iteraciones ya que todos los coeficientes de costo reducido (última fila) son positivos, por lo que la regla de entrada no se cumple (definición de columna pivote). Segundo, no existe una estructura de matriz de identidad positiva en las variables de exceso ya que sus coeficientes son iguales a -1. Con todo esto, no es factible iniciar el método Simplex fase II.

Los valores de los excesos que se muestran en la Figura 80 corresponden a las distancias que existe entre la solución inicial (no factible), correspondiente al origen, con el punto extremo adyacente a la restricción que corresponda.

Por ejemplo, $e_1 = -3$ significa que el origen se encuentra a tres unidades del punto extremo $(0, 3)$ y que $e_2 = -4$ se encuentra a cuatro unidades del punto extremo $(4, 0)$, ambos fuera de la región de soluciones factibles, rellena en color gris (por eso el signo negativo).

De hecho, al agregar la variable de exceso en cada restricción, considerando el punto inicial como el origen del eje de coordenadas, se asume que ambos puntos extremos tengan que “retroceder” en e unidades para situarse en el origen. La Figura 81 muestra gráficamente lo señalado.

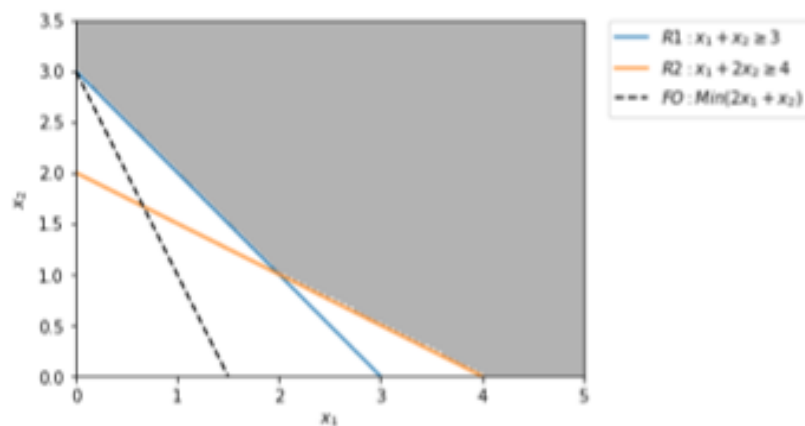


Figura 81.- Graficación del PPL de minimización (elaboración propia).

A base de lo evidenciado en la Figura 81, es posible identificar que en un problema de minimización de los que se estudiarán en este texto, el origen no se encontrará en la región de soluciones factibles ya que eso implicaría que el mínimo, en toda ocasión, sea el origen. Todo lo anterior, en vista a que se está

trabajando en el cuadrante, u octante en el caso de tres dimensiones, no negativo.

Para el método Simplex fase I se estudiarán dos métodos: el método de la BIG-M y el método de variables artificiales.

5.2.1. Método de la BIG-M

El propósito del método Simplex fase I es situar al punto de inicio de las iteraciones en un punto extremo de la región de soluciones factibles con el propósito de habilitar el empleo del método Simplex fase II, el que permitirá a su vez alcanzar la solución óptima (siempre y cuando exista una solución).

A fin de construir la matriz identidad, se agregan variables artificiales, multiplicadas en la FO por un número muy grande (M representa un número grande), ya que la minimización del problema estándar tenderá a no elegir dichas variables artificiales. Para aplicar el método de la Big – M se utilizará el siguiente procedimiento:

- Formular el PPL en la forma estándar.

Se incorporan las variables de holgura y exceso que correspondan. Para efectos didácticos, se empleará el PPL presentado en esta sección. El PPL en su forma canónica a estudiar es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \min_x & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dicho PPL es reformulado a su forma estándar, a través del uso de dos variables de exceso que se restan a las variables de decisión en el lado izquierdo de cada restricción, a fin de lograr que la desigualdad “mayor o igual a” quede “igual a”. El PPL en su forma estándar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{x,e} \quad & 2x_1 + x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 - e_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Componer la tabla Simplex

A base del PPL en su forma estándar, se compone la tabla Simplex de la siguiente forma (Figura 82):

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
e_1	1	1	-1	0	3
e_2	1	2	0	-1	4
FO	2	1	0	0	0

Figura 82.- Tabla Simplex del PPL reformulado (elaboración propia).

- Agregar variables artificiales

Con el propósito de componer la matriz identidad para las variables básicas, se procede a incorporar una cantidad de variables artificiales igual a la cantidad de variables básicas que tienen coeficiente negativo. En este caso, e_1 y e_2 tienen coeficiente negativo en la matriz identidad, por lo que se incorporarán dos variables artificiales a_1 y a_2 .

En los coeficientes de costo reducido de estas nuevas variables se coloca una constante M , la que puede adoptar un valor muy grande con respecto a los otros coeficientes. El nuevo PPL es formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{x,e} \quad & 2x_1 + x_2 + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 - e_1 + a_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \\ & a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la siguiente figura se muestra la tabla configurada bajo la nueva estructura (Figura 83):

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	-1	0	1	0	3
a_2	1	2	0	-1	0	1	4
FO	2	1	0	0	M	M	0

Figura 83.- Tabla Simplex inicial del PPL con el método BIG-M (elaboración propia).

A este punto, aún falta trabajar la tabla Simplex para que quede en forma canónica.

Entonces, se deben eliminar las cantidades " M " desde la última fila, transformándolas en cero.

- Eliminar las constantes M de la fila de costos reducidos

Para poder configurar la tabla Simplex con una base en estructura de matriz identidad, es necesario aún eliminar las

constantes M desde la última fila para las variables a_1 y a_2 . La siguiente operación se aplica a la última fila para lograr lo requerido:

$$F_3^N \rightarrow F_3 - MF_1 - MF_2$$

La tabla Simplex, en la fase I del método, queda de la siguiente manera (Figura 84):

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	-1	0	1	0	3
a_2	1	2	0	-1	0	1	4
FO	2-2M	1-3M	M	M	0	0	-7M

Figura 84.- Tabla Simplex del PPL reformulado con el método BIG-M (elaboración propia).

Dada la estructura de la tabla, es factible comenzar con las iteraciones Simplex a través de la fase II porque existen valores negativos en la última fila (criterio de entrada para variables no básicas a la base) y existe una matriz identidad que define las variables básicas.

A partir de la tabla Simplex de la Figura 84, se ejecutan las operaciones elementales hasta eliminar de la base a las variables auxiliares "a".

- Obtener un punto de inicio factible

El objetivo de estos pasos es sacar de la base a las variables artificiales de tal forma que la base esté compuesta por variables que integran el PPL original, trasladando el punto de inicio del método Simplex a un punto extremo de la región de soluciones factibles.


Para lo anterior, se aplica el mismo procedimiento del método Simplex fase II, desde el paso 4 hasta el paso 7, cambiándose la prueba de optimalidad del paso 8 por una de certificación de la eliminación de las variables artificiales.

La Figura 85 muestra la iteración 1 del método para actualizar la base y la Figura 86 el resultado final de la iteración 1.

Nótese que los coeficientes de costo reducido de x_1 y x_2 son negativos debido al signo que tiene la constante M .

$$F_1^N \rightarrow F_1 - F_2^N \quad F_2^N \rightarrow F_2/2 \quad F_3^N \rightarrow F_3 - (1-3M)F_2^N$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i	Ratio
a_1	1	1	-1	0	1	0	3	3/1
a_2	1	2	0	-1	0	1	4	4/2
FO	2-2M	1-3M	M	M	0	0	-7M	


 Entra


 Sale

Figura 85.- Proceso Simplex fase I – iteración 1 (elaboración propia).


	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	½	0	-1	½	1	-½	1
x_2	½	1	0	-½	0	½	2
FO	3/2-M/2	0	M	1/2-M/2	0	3M/2-1/2	-M-2

Figura 86.- Resultado Simplex fase I – iteración 1 (elaboración propia).

En este punto, la variable artificial a_2 ya salió de la base, entrando x_2 (marcado en color azul).

La Figura 87 y Figura 88 muestra la iteración 2 del método Simplex fase I.

$$F_1^N \rightarrow F_1 / \frac{1}{2} \quad F_2^N \rightarrow F_2 + \frac{1}{2} F_1^N \quad F_3^N \rightarrow F_3 - (1/2 - M/2) F_1^N$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i	Ratio
a_1	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	$1/(\frac{1}{2})$  Sale
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	n.a.
FO	$3/2 - M/2$	0	M	$1/2 - M/2$	0	$3M/2 - 1/2$	$-M - 2$	


 Entra

Figura 87.- Proceso Simplex fase I – iteración 2 (elaboración propia).

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
e_2	1	0	-2	1	2	-1	2
x_2	1	1	-1	0	1	0	3
FO	1	0	1	0	M-1	M	-3

Figura 88.- Resultado Simplex fase I – iteración 2 (elaboración propia).

Finalizada la 2da iteración, y luego del ingreso a la base de la variable e_2 (fila en color azul) ¿se eliminaron las variables artificiales?

Respuesta: si, entonces hay que eliminar las variables auxiliares y seguir con Simplex fase II. La tabla Simplex para iniciar la fase II es la siguiente (Figura 89):

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
e_2	1	0	-2	1	2
x_2	1	1	-1	0	3
FO	1	0	1	0	-3

Figura 89.- Resultado Simplex fase I – final (elaboración propia).

Es interesante no solo analizar la tabla Simplex, sino que también observar gráficamente cómo se comportó el método.

En la Figura 90, se muestra la secuencia gráfica de la solución del método Simplex fase I.

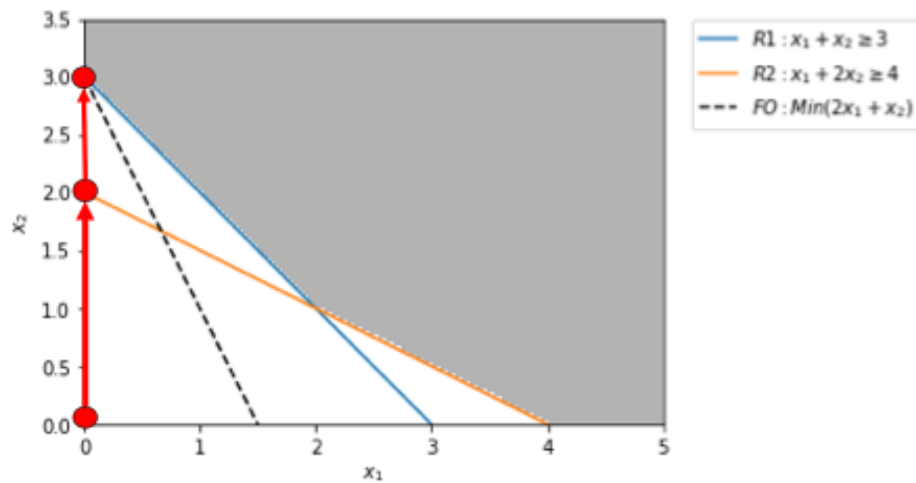


Figura 90.- Resultado gráfico Simplex fase I (elaboración propia).

El propósito de incluir variables artificiales es construir un “puente” entre el origen del eje de coordenadas y un punto extremo de la región de soluciones factibles.

Al término de la iteración 1, el valor de la variable de decisión es $x_2 = 2$ y la variable artificial es $a_1 = 1$, encontrándose entonces este punto aún a una unidad de alcanzar la restricción asociada a la variable x_2 .

En este caso, coincide que el primer punto extremo alcanzado es también el punto óptimo, lo que se evidencia del hecho que en la tabla Simplex de la Figura 89 no existe ningún valor de los coeficientes de costo reducidos que sea negativo.

Igualmente, de la Figura 90 se aprecia que la función objetivo (línea segmentada) tiene su último contacto con la región de soluciones factibles en dicho punto extremo.

5.2.2. Método de variables artificiales

El método de variables artificiales corresponde a un método para dar solución al problema de “no factibilidad” de origen, análogo al método Big – M, lo que es especialmente aplicable para los problemas de minimización. Este método se utiliza durante la Fase I de Simplex.

A fin de construir la matriz identidad, se reformula el problema de optimización, teniendo como nueva función objetivo una suma de variables artificiales, no negativas, a ser minimizadas. De esta forma, el problema tenderá a eliminar dichas variables que permiten, en un inicio, “reparar” la no factibilidad de origen. Al igual que el método de la BIG-M, las variables artificiales forman la matriz identidad.

Para la aplicación del método de las variables artificiales, se describe el siguiente procedimiento:

- Formular el PPL en la forma estándar.

Al igual que en el método de la Big – M, se incorporan las variables de holgura y exceso que correspondan. Para efectos didácticos, se empleará el mismo PPL presentado en esta sección y para la Big – M.

El PPL en su forma canónica a estudiar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dicho PPL es reformulado a su forma estándar, a través del uso de dos variables de exceso que se restan a las variables de decisión en el lado izquierdo de cada restricción, a fin de lograr que la desigualdad “mayor o igual a” quede “igual a”. El PPL en su forma estándar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{x,e} \quad & 2x_1 + x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 - e_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Componer la tabla Simplex

A base del PPL en su forma estándar (similar al método de la Big – M), se compone la tabla Simplex de la siguiente forma (Figura 91):

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
e_1	1	1	-1	0	3
e_2	1	2	0	-1	4
FO	2	1	0	0	0

Figura 91.- Tabla Simplex del PPL reformulado (elaboración propia).

- Agregar variables artificiales

A fin de componer la matriz identidad para las variables básicas, se procede a incorporar una cantidad de variables artificiales igual a la cantidad de variables básicas que tienen coeficiente negativo.

En este caso, e_1 y e_2 tienen coeficiente negativo en la matriz identidad, por lo que se incorporarán dos variables artificiales a_1 y a_2 . En el caso de la función objetivo, la expresión inicial $2x_1 + x_2 + 0e_1 + 0e_2$ es reemplazada por la suma de las dos variables artificiales $a_1 + a_2$.

El propósito de lo anterior es que, al realizar la minimización de dichas variables artificiales, se obtenga que la solución al problema sea que ambas tomen valor igual a cero, lo que implicará a su vez sacarlas de la base y así poder eliminarlas de la tabla Simplex. El nuevo PPL es formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_a \quad & a_1 + a_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 - e_2 + a_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \\ & a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la siguiente figura se muestra la tabla configurada bajo la nueva estructura (Figura 92):

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
e_1	1	1	-1	0	1	0	3
e_2	1	2	0	-1	0	1	4
FO	0	0	0	0	1	1	0

Figura 92.- Tabla Simplex del PPL inicial con el método de variables artificiales (elaboración propia).

Aún resta por trabajar la tabla Simplex para que quede en forma canónica. Entonces, se deben eliminar los coeficientes

“1” desde la última fila (color azul), transformándolas en cero en las columnas de las variables artificiales.

- Eliminar las constantes unitarias de la fila de costos reducidos.

Para poder configurar la tabla Simplex con una base en estructura de matriz identidad, es necesario aún eliminar las constantes “1” desde la última fila para las variables a_1 y a_2 . La siguiente operación se aplica a la última fila para lograr lo requerido:

$$F_3^N \rightarrow F_3 - F_1 - F_2$$

En la fase I del método de variables artificiales, la tabla Simplex queda de la siguiente manera (Figura 93):

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	-1	0	1	0	3
a_2	1	2	0	-1	0	1	4
FO	-2	-3	1	1	0	0	-7

Figura 93.- Tabla Simplex del PPL reformulado con el método variables artificiales (elaboración propia).


- Obtener un punto de inicio factible.

A partir de la tabla anterior, es posible iniciar las iteraciones para eliminar las variables artificiales de la base y obtener una primera solución factible a base de algún punto extremo alcanzado.

La Figura 94 muestra la iteración 1 del método para actualizar la base:

$$F_1^N \rightarrow F_1 - F_2^N \quad F_2^N \rightarrow F_2/2 \quad F_3^N \rightarrow F_3 + 3F_2^N$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i	Ratio
a_1	1	1	-1	0	1	0	3	3/1
a_2	1	2	0	-1	0	1	4	4/2
FO	-2	-3	1	1	0	0	-7	


Entra


 **Sale**

Figura 94.- Proceso Simplex fase I – iteración 1 variables artificiales (elaboración propia).

Luego de la primera iteración, se obtiene la siguiente tabla (Figura 95), en la cual, la variable artificial a_2 ya no está en la base:

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1/2	0	-1	1/2	1	-1/2	1
x_2	1/2	1	0	-1/2	0	1/2	2
FO	-1/2	0	1	-1/2	0	3/2	-1

Figura 95.- Resultado Simplex fase I – iteración 1 variables artificiales (elaboración propia).


Finalizada la iteración 1, cabe preguntarse ¿se eliminaron las variables artificiales? En este caso, la respuesta es NO, debido a que aún existen dos coeficientes de costo reducidos negativos y una variable artificial aún está en la base, por lo que se debe continuar.

Ante igualdad de coeficientes de “entrada” para definir la columna pivote, el criterio de entrada es seleccionar la variable de decisión con el menor de los índices.

En este caso, dado que hay dos coeficientes de costos reducidos con el mismo valor, por lo que seleccionará x_1 (Figura 96).

$$F_1^N \rightarrow F_1 / \left(\frac{1}{2}\right) \quad F_2^N \rightarrow F_2 - \frac{1}{2}F_1^N \quad F_3^N \rightarrow F_3 + \frac{1}{2}F_1^N$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i	Ratio
a_1	1/2	0	-1	1/2	1	-1/2	1	1/(1/2)
x_2	1/2	1	0	-1/2	0	1/2	2	2/(1/2)
FO	-1/2	0	1	-1/2	0	3/2	-1	


 Entra


 Sale

Figura 96.- Proceso Simplex fase I – iteración 2 variables artificiales (elaboración propia).

Dada las operaciones de transformación aplicadas, se puede eliminar de la base la variable artificial a_1 , obteniéndose la siguiente tabla (Figura 97):

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
x_1	1	0	-2	1	2	-1	2
x_2	0	1	1	-1	-1	1	1
FO	0	0	0	0	1	1	0

Figura 97.- Resultado Simplex fase I – iteración 2 variables artificiales (elaboración propia).

Al término de esta iteración y debido a que las variables artificiales ya están fuera de la base, hay que eliminarlas y *reemplazar* la última fila con los valores originales de la función objetivo para seguir con Simplex fase II. La Figura 98 muestra lo señalado en este párrafo:

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
x_1	1	0	-2	1	2
x_2	0	1	1	-1	1
FO	2	1	0	0	0

Figura 98.- Resultado Simplex fase I – reconfiguración (elaboración propia).

No obstante, aún falta por transformar los coeficientes de costo reducidos de las variables básicas para dejarlos con un valor igual a cero (x_1 y x_2). Para lo anterior, se utiliza la siguiente operación:

$$F_3^N \rightarrow F_3 - 2F_1 - F_2$$

El resultado de la transformación y la tabla Simplex para iniciar la fase II, se presenta en la Figura 99.

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
x_1	1	0	-2	1	2
x_2	0	1	1	-1	1
FO	0	0	3	-1	-5

Figura 99.- Tabla Simplex fase I final (elaboración propia).

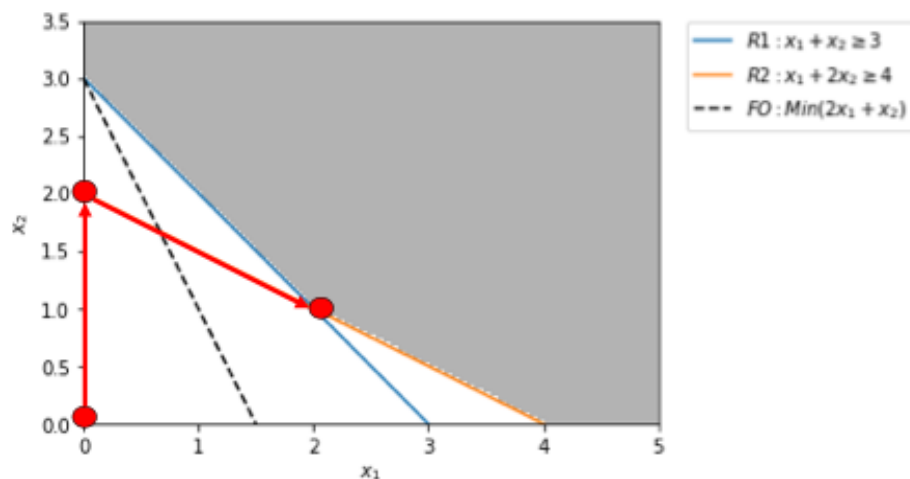


Figura 100.- Resultado gráfico parcial Simplex fase I – variables artificiales (elaboración propia).

La Figura 100 muestra la solución gráfica de la tabla Simplex final. En esta, se aprecia que se alcanzó un punto extremo de la región de soluciones factibles, aunque no es el óptimo. Esta diferencia con el método de la Big – M solo se


debe a que en el método de variables artificiales se utilizó el criterio de índice más bajo de la variable para definir la columna pivote, lo que es absolutamente arbitrario, pero de todos modos era necesario definir un procedimiento de entrada (regla de Bland).

- Iniciar Simplex fase II (desde paso 4).

Se aplica el método Simplex fase II, en la modalidad conocida en este capítulo, obteniéndose lo siguiente (Figura 101 y Figura 102):

$$F_1^N \rightarrow F_1/1 \quad F_2^N \rightarrow F_2 + F_1^N \quad F_3^N \rightarrow F_3 + F_1^N$$

Fase II	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i	Ratio
x_1	1	0	-2	1	2	2/1
x_2	0	1	1	-1	1	-.
FO	0	0	3	-1	-5	


 Entra


 Sale

Figura 101.- Tabla Simplex fase II – iteración Simplex I (elaboración propia).

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
e_2	1	0	-2	1	2
x_2	1	1	-1	0	3
FO	1	0	1	0	-3

Figura 102.- Tabla final Simplex fase II – método de variables artificiales (elaboración propia).

La tabla anterior (Figura 102) no contiene coeficientes de costo reducidos negativos, por lo que se alcanzó la solución óptima. El punto óptimo es $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $e_1 = 0$ y $e_2 = 2$, con

un valor óptimo igual a 3. Esta solución coincide con el resultado obtenido con el método de la Big – M.

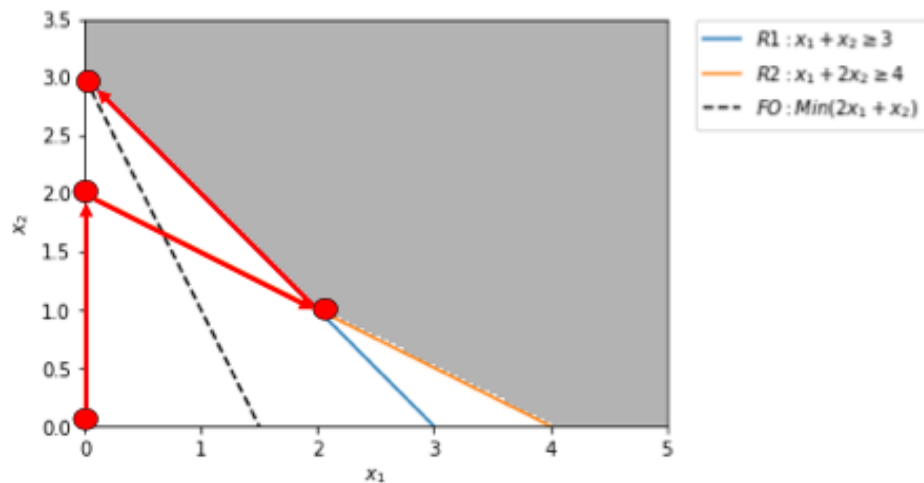


Figura 103.- Resultado gráfico final Simplex fase II – método de variables artificiales (elaboración propia).

La Figura 103 muestra gráficamente la trayectoria de las soluciones Simplex, tanto en fase I y fase II, hasta alcanzar el punto óptimo, lo que coincide con la solución final del método de la Big – M. No obstante, la iteración adicional realizada en el método de variables artificiales se produce por el criterio de selección de la columna pivote empleado ante igualdad de coeficientes, según la regla de Bland.

5.3. Simplex casos especiales

Durante el proceso de resolución de un PPL, mediante el método Simplex, se puede dar la situación en la cual el problema tenga características especiales que hagan que la tabla Simplex entregue valores confusos según lo estudiado.

Estos son los denominados casos especiales y que corresponden a los siguientes:

- Soluciones múltiples: ocurre cuando la pendiente de la función objetivo es similar a la pendiente de una restricción activa.
- Solución degenerada: se produce al existir más de n restricciones activas en un espacio de dimensión \mathbb{R}^{mxn} , donde n es la dimensión del vector de variables de decisión y m la cantidad de restricciones. Se observa cuando se tienen variables básicas con valor igual a cero.
- Problema no acotado: en el caso de los problemas de maximización, la función objetivo crece indefinidamente debido a que la región de soluciones factibles es un espacio abierto sin restricción de techo. Para los problemas de minimización no sucederá esto debido a que se está trabajando en el subespacio no negativo del sistema de coordenadas.
- Problema no factible: ocurre cuando no existe una región de soluciones factibles que satisfaga a todas las restricciones del PPL.

Según el tipo de caso especial, los valores de la tabla Simplex variarán y serán a su vez el indicador del tipo de caso especial a enfrentarse.

5.3.1. Caso especial 1: soluciones múltiples

Las soluciones múltiples se dan cuando la pendiente de la función objetivo es igual a la pendiente de una de las aristas de la región de soluciones factibles, en la dirección de la optimización (máximo o mínimo).

Las aristas están compuestas por restricciones que estructuran la región, por lo que la solución óptima estará dada

por los infinitos puntos que componen dicho trazo (caso de variables continuas). Sea un problema de la forma:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Su forma estándar, agregando las variables de holgura en cada restricción, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -x_1 - 2x_2 + 0h_1 + 0h_2 \\ \text{s.a.:} \quad & 2x_1 + 4x_2 + h_1 = 8 \\ & x_1 + 4x_2 + h_2 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La tabla Simplex asociada a este PPL en forma estándar es la siguiente (Figura 104):


	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_1	2	4	1	0	8
h_2	1	4	0	1	6
FO	-1	-2	0	0	0

Figura 104.- Tabla Simplex inicial – soluciones múltiples (elaboración propia).

Note que la pendiente de la restricción 1 es $-2/4 = -1/2$, similar a la pendiente de la FO que es $-1/2$. La Figura 105 y Figura 106 muestran el proceso de las dos iteraciones del método Simplex fase II requeridas para alcanzar una solución óptima.

$$F_1 \rightarrow F_1 - 4 \cdot F_2 \quad F_2 \rightarrow F_2/4 \quad F_3 \rightarrow F_3 + 2 \cdot F_2$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i	Ratio
h_1	2	4	1	0	8	8/4
h_2	1	4	0	1	6	6/4
FO	-1	-2	0	0	0	


Entra



 **Sale**

Figura 105.- Tabla Simplex final – soluciones múltiples (elaboración propia).

$$F_1 \rightarrow F_1 \quad F_2 \rightarrow F_2 - F_1/4 \quad F_3 \rightarrow F_3 + F_1/2$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	q_i	Ratio
h_1	1	0	1	-1	2	2/1
x_2	1/4	1	0	1/4	3/2	(3/2)/(1/4)
FO	-1/2	0	0	1/2	3	


Entra


 **Sale**

Figura 106.- Tabla Simplex final – soluciones múltiples (elaboración propia).

Consecuentemente, la tabla Simplex final del proceso se presenta en la Figura 107. Al respecto, dicha solución es óptima debido a que no existen coeficientes de costo reducido negativos, con un punto óptimo igual a $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $h_1 = 0$ y $h_2 = 0$.

	x_1	x_2	h_1	h_2	q_i
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	-1/4	1/2	1
FO	0	0	1/2	0	4


Figura 107.- Tabla Simplex final – soluciones múltiples (elaboración propia).

No obstante, llama la atención el coeficiente de costo reducido de $h_2 = 0$. En teoría, aquello indica que en el caso de seleccionar dicha variable para ingresar a la base, en desmedro de alguna de las dos variables básicas, su efecto en la función objetivo y valor óptimo sería indiferente. El caso contrario ocurriría si se seleccionara h_1 , la que impactaría negativamente en una proporción de $1/2$ del valor que adopte dicha variable de holgura.

Para comprobar lo señalado en el párrafo anterior, se aplicará el método Simplex fase II definiendo como columna pivote aquella de h_2 (Figura 108).

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_2 \quad F_2 \rightarrow F_2 / (1/2) \quad F_3 \rightarrow F_3$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	Ratio
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	-1/4	1/2	1
FO	0	0	1/2	0	4

 **Entra**


 **Sale**

Figura 108.- Tabla Simplex – iteración de comprobación (elaboración propia).

	x_1	x_2	h_1	h_2	q_i
x_1	1	1/2	1/2	0	4
h_2	0	1/2	-1/2	1	2
FO	0	0	1/2	0	4

Figura 109.- Tabla Simplex final comprobación – soluciones múltiples (elaboración propia).

La tabla Simplex resultante se presenta en la Figura 109. Al analizar los parámetros que incluye, se observa que ingresó a la

base la variable de holgura $h_2 = 2$, saliendo $x_2 = 0$. Sin embargo, esta última variable tiene su coeficiente de costo reducido igual a cero en la tabla Simplex, lo que indica que su ingreso es indiferente a la base.

En consideración a que la holgura h_1 es siempre cero y su coeficiente de costo reducido es mayor a cero, esto implica que la solución se encuentra sobre la restricción 1, asociada a dicha holgura, ya que si $h_1 > 0$, el punto extremo que representa la solución parcial al problema estaría alejada de la restricción 1.

En la Figura 110, se presenta la solución gráfica al problema de soluciones múltiples en el cual se observa lo analizado hasta este momento. Cabe señalar que se debe tener una cantidad de precios duales o sombras y costos reducidos, distintos a cero, igual a la cantidad de restricciones activas (desigualdades).

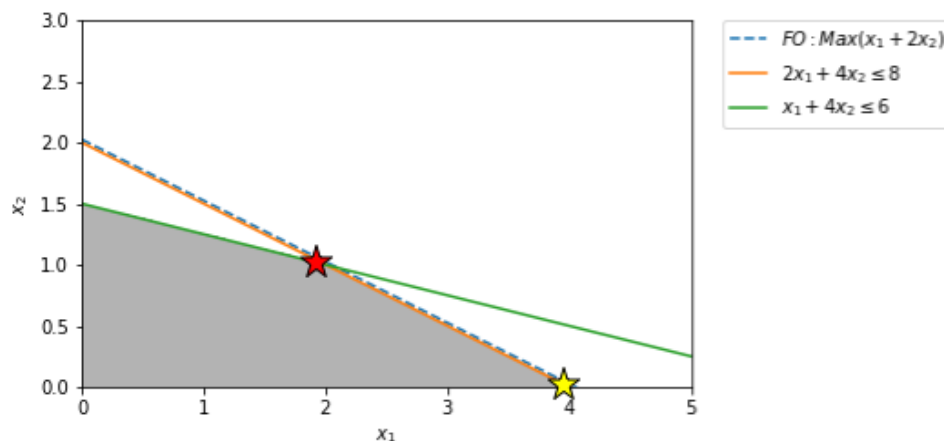


Figura 110.- Solución gráfica al PPL con soluciones múltiples (elaboración propia).

5.3.2. Caso especial 2: solución degenerada

Una solución óptima degenerada se produce cuando existen más restricciones activas que variables básicas. Por lo tanto, se

dice que una solución básica factible es degenerada cuando alguno de los componentes de ella es nulo.

Para ejemplificar este caso especial, se analizará el siguiente PPL:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Reformulado a la forma estándar, el PPL se representa por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -3x_1 - 9x_2 + 0h_1 + 0h_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + 4x_2 + h_1 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 + h_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Componiendo la tabla Simplex se obtiene lo siguiente (Figura 111):

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_1	1	4	1	0	8
h_2	1	2	0	1	4
FO	-3	-9	0	0	0


Figura 111.- Tabla Simplex inicial – soluciones degeneradas (elaboración propia).

La Figura 112 y Figura 113 muestran las iteraciones Simplex fase II para resolver un PPL con soluciones degeneradas. Cabe señalar que para los casos de empate en la determinación de una

columna o fila pivote, se seleccionará el índice asociado a la variable correspondiente con el menor índice.

$$1 \rightarrow 1/4 \quad 2 \rightarrow 2 - 3 \cdot 1 \quad 3 \rightarrow 3 + 9 \cdot 1$$

	1	2	h_1	h_2	i	Ratio
h_1	1	4	1	0	8	8/4
h_2	1	2	0	1	4	4/2
FO	-3	-9	0	0		


Entra



 **Sale**

Figura 112.- Tabla Simplex iteración 1 – soluciones degeneradas (elaboración propia).

$$F_1 \rightarrow F_1 - (1/4)F_2 \quad F_2 \rightarrow F_2/(1/2) \quad F_3 \rightarrow F_3 + (3/4)F_2$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i	Ratio
x_2	1/4	1	1/4	0	2	2/(1/4)
h_2	1/2	0	-1/2	1	0	0/(1/2)
FO	-3/4	0	9/4	0	18	


Entra


 **Sale**

Figura 113.- Tabla Simplex iteración 2 – soluciones degeneradas (elaboración propia).

La tabla Simplex final del proceso es la presentada a continuación (Figura 114):

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
x_2	0	1	1/2	-1/2	2
x_1	1	0	-1	2	0
FO	0	0	3/2	3/2	18

Figura 114.- Tabla Simplex final – soluciones degeneradas (elaboración propia).

Es interesante señalar que, entre las soluciones obtenidas en las iteraciones 1 y 2, no existió variación en el valor óptimo, habiendo en ambos casos una variable básica nula, es decir, con un valor igual a cero. Lo anterior, hace concluir que se está en presencia de una solución degenerada.

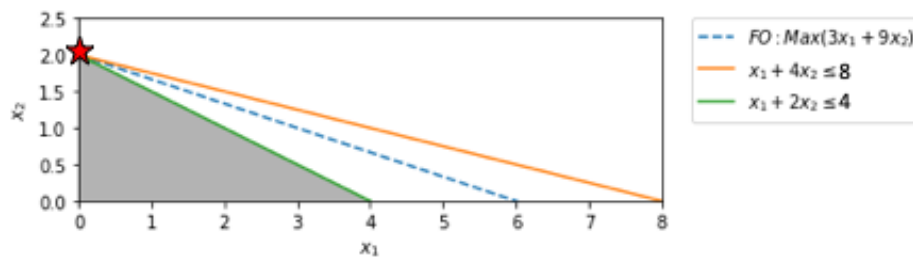


Figura 115.- Solución gráfica del PPL – soluciones degeneradas (elaboración propia).

En la Figura 115 se observa claramente que en el punto óptimo $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $h_1 = 0$ y $h_2 = 0$ concurren tres restricciones activas (las dos restricciones principales y $x_2 \geq 0$). Por lo tanto, si $x_1 = 0$ o $h_2 = 0$ se encontraban en la base, no influía a la determinación de la solución óptima.

5.3.3. Caso especial 3: problema no acotado

Un problema no acotado conlleva a que la función objetivo (para una maximización) aumenta su valor infinitamente sin reducir ninguna holgura. Normalmente, un problema con estas características está mal planteado. Sea el siguiente PPL de maximización para ser resuelto por el método Simplex:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Reformulado a la forma estándar, el PPL se representa por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -x_1 - 2x_2 + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_1 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 3 \\ & x_1 - x_2 - e_2 + a_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \\ & a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Componiendo la tabla Simplex, con los datos del PPL en su forma estándar, se obtiene lo siguiente (Figura 116):

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	-1	0	1	0	3
a_2	1	-1	0	-1	0	1	1
FO	-1	-2	0	0	M	M	0

Figura 116.- Tabla Simplex inicial – problema no acotado (elaboración propia).

Conforme a la composición de la tabla Simplex, es necesario despejar las constantes con valor M en la última final e iniciar la fase I del método Simplex. Para convertir los coeficientes con valor M en cero, se aplica la siguiente transformación:

$$F_3 \rightarrow F_3 - MF_1 - MF_2$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	-1	0	1	0	3
a_2	1	-1	0	-1	0	1	1
FO	-1-2M	-2	M	M	0	0	-4M


Figura 117.- Tabla Simplex inicial fase I – problema no acotado (elaboración propia).

Con esto, la tabla Simplex para iniciar las iteraciones de la fase I es la tabla representada en la Figura 117.

La Figura 118 y Figura 119 presentan los cálculos de las dos iteraciones del método Simplex fase I, mientras que la Figura 120 muestra la tabla Simplex final de la fase I.

$$F_1 \rightarrow F_1 - F_2 \qquad F_2 \rightarrow F_2 \qquad F_3 \rightarrow F_3 - (-1 - 2M)F_2$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i	Ratio
a_1	1	1	-1	0	1	0	3	3/1
a_2	1	-1	0	-1	0	1	1	1/1
FO	-1-2M	-2	M	M	0	0	-4M	


Entra



 **Salida**

Figura 118.- Tabla Simplex fase I iteración 1 – problema no acotado (elaboración propia).

$$F_1 \rightarrow F_1/2 \qquad F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \qquad F_3 \rightarrow F_3 - (-3 - 2M)F_1$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i	Ratio
a_1	0	2	-1	1	1	-1	2	3/1
x_1	1	-1	0	-1	0	1	1	NA
FO	0	-3-2M	M	-1-M	0	1+2M	1-2M	


Entra


 **Salida**

Figura 119.- Tabla Simplex fase I iteración 2 – problema no acotado (elaboración propia).

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	b_i
x_2	0	1	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1
x_1	1	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2	2
FO	0	0	-3/2	1/2	3/2+M	-1/2+M	4

Figura 120.- Tabla Simplex fase I final – problema no acotado (elaboración propia).

En la tabla Simplex de la Figura 120 se aprecia que las variables artificiales ya salieron de la base, por lo cual, pueden ser eliminadas y, dado que aún existe un coeficiente de costo reducido negativo, es necesario iniciar una nueva iteración utilizando la fase II del método Simplex, correspondiendo aquella a la columna pivote.

Sin embargo, al momento de seleccionar la fila pivote se aprecia que todos los coeficientes de dicha columna son negativos, lo que impide aplicar la regla del ratio mínimo para definir la fila pivote.

Lo descrito en el párrafo anterior es el indicativo de que este problema está no acotado, ya que cada vez que se inicie una iteración, el ingreso de la nueva variable a la base solo “empeorará” el valor óptimo, según el sentido de optimización. La Figura 121 muestra la solución del problema mediante el método gráfico.

En particular, se observa que en la medida que la función objetivo aumenta su valor, no existe alguna restricción que cierre la región de soluciones factibles en su “techo”, permitiendo un crecimiento indefinido de la función objetivo.

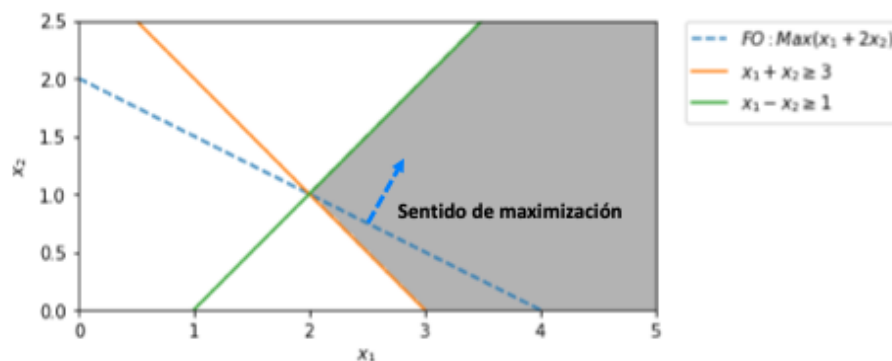


Figura 121.- Solución gráfica del PPL – problema no acotado (elaboración propia).

Por lo tanto, las siguientes afirmaciones se desprenden del análisis detallado de lo observado para un problema no acotado, a base de la tabla Simplex de la Figura 120:

- Se entra por e_1 , pero la columna no tiene elementos positivos (tranco o distancia del paso).
- Cuando un punto se desplaza por e_1 , por cada unidad que aumenta e_1 , las variables x_1 y x_2 aumenta en $1/2$ unidades.
- El test de minimización o ratio indica la variable saliente de la base, permitiendo encontrar cuál holgura o exceso se hace cero primero, a lo largo del borde del poliedro.
- La variable de salida corresponde a la fila que tiene la menor razón distancia/tranco positiva, ya que de otro modo (negativa), la *velocidad de acercamiento no es positiva* y el punto no va a interceptar al hiperplano asociado a la holgura.

Tomando como variable independiente a los valores de la variable de decisión x_1 , se procedió a calcular los valores de las otras variables y de la función objetivo, lo que se muestra en la Figura 122:

Aumento del valor de x_1 →

x_1	1	3/2	2	3	4	5
x_2	0	1/2	1	2	3	4
e_1	-2	-1	0	2	4	6
e_2	0	0	0	0	0	0
FO	1	5/2	4	7	10	13

Figura 122.- Valores de las variables y función objetivo – solución no acotada (elaboración propia).

En la medida que x_1 aumenta de valor, lo hace también x_2 y la variable de exceso e_1 asociada a la restricción 1 (color naranja).

La variable de exceso e_2 mantiene su valor igual a cero lo que implica que la solución parcial al problema se mantiene siempre en contacto con la restricción 2 (color verde), pero cada vez se va alejando más de la restricción 1, situación que se aprecia a partir de la solución gráfica señalada.

5.3.4. Caso especial 4: problema no factible

Un problema no factible acarrea que no existe una región de soluciones factibles que dé satisfacción a todas las restricciones.

Es decir, no existe una intersección de todos los medios y espacios generados por los hiperplanos cortantes que están definidos por las restricciones del problema.

Para ejemplificar este caso especial, se considerará el siguiente PPL como guía para su desarrollo:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Reformulado a la forma estándar, el PPL se representa por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -x_1 - 2x_2 + 0e_1 + 0h_1 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 = 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + h_1 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, h_1 \geq 0 \end{aligned}$$

En consideración a la existencia de una variable de exceso, se requiere utilizar el procedimiento de la fase I del método Simplex, reformulando el PPL como sigue:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -x_1 - 2x_2 + 0e_1 + 0h_1 + Ma_1 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + h_1 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & e_1 \geq 0, h_1 \geq 0, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Componiendo la tabla Simplex, con los datos del PPL en su forma estándar, se obtiene lo siguiente (Figura 123):

	x_1	x_2	e_1	h_1	a_1	b_i
h_1	1	1	-1	0	1	4
a_1	3	2	0	1	0	6
FO	-1	-2	0	0	M	0

Figura 123.- Tabla Simplex inicial – problema no factible (elaboración propia).

Para obtener la tabla Simplex fase I requerida para iniciar las iteraciones, es necesario eliminar el coeficiente M de la columna de a_1 , utilizando la siguiente expresión:

$$F_3 \rightarrow F_3 - MF_1$$

La Figura 124 muestra la tabla Simplex configurada para comenzar con las iteraciones del método Simplex fase I.

La Figura 125 y Figura 126 presentan la iteración del método Simplex fase I y la tabla final obtenida, respectivamente.

	x_1	x_2	e_1	h_1	a_1	b_i
h_1	1	1	-1	0	1	4
a_1	3	2	0	1	0	6
FO	-1-M	-2-M	M	0	0	$-4M$

Figura 124.- Tabla Simplex reconfigurada fase I – problema no factible (elaboración propia).

$$F_1 \rightarrow F_1 - F_2 \quad F_2 \rightarrow F_2/2 \quad F_3 \rightarrow F_3 - (-2 - M)F_2$$

	x_1	x_2	e_1	h_1	a_1	b_i	Ratio
a_1	1	1	-1	0	1	4	4/1
h_1	3	2	0	1	0	6	6/2 ← Sale
FO	-1-M	-2-M	M	0	0	$-4M$	

↑
Entra

Figura 125.- Tabla Simplex fase I iteración 1 – problema no factible (elaboración propia).

	x_1	x_2	e_1	h_1	a_1	q_i
a_1	-1/2	0	-1	-1/2	1	1
x_2	3/2	1	0	1/2	0	3
FO	2+M/2	0	M	1+M/2	0	$6 - M$

Figura 126.- Tabla Simplex fase I final – problema no factible (elaboración propia).

A partir de la tabla final de la Figura 126, se desprende que no existen coeficientes de costo reducido negativos, lo que implicaría que se alcanzó la primera solución factible para eliminar las variables artificiales a iniciar la fase II.

Sin embargo, no se ha eliminado la variable artificial de la base, por lo que no se podría continuar con la fase II, generándose una contradicción entre las afirmaciones descritas.

Consecuentemente, se está frente a un caso en las que no existe alguna solución factible para este problema, considerando lo siguiente:

- No hay incremento posible de las variables entrantes candidatas (no básicas), ya que los coeficientes de costo reducido son positivos.
- No obstante, la variable artificial no ha podido sacarse de la base.
- Eso significa que no se ha encontrado alguna solución factible inicial para finalizar el Simplex fase I.
- Por lo tanto, el problema es no factible, ya que no hay alguna dirección que mejore la función objetivo, ni tampoco se ha encontrado una primera solución factible.

Para dar mayor claridad a los conceptos tratados en esta sección, se procede a resolver el PPL mediante el método gráfico:

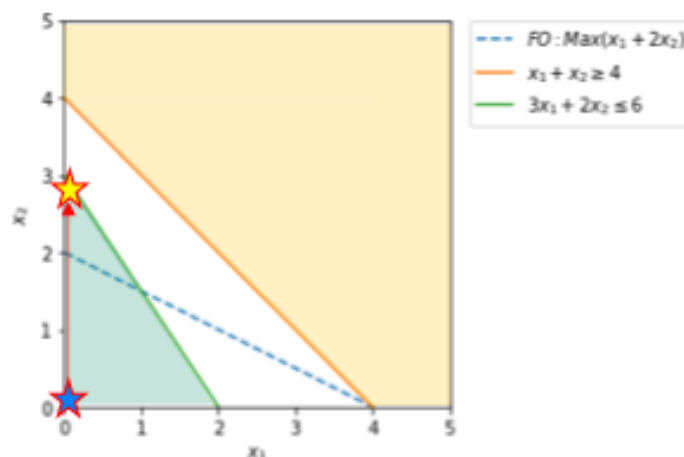


Figura 127.- Solución gráfica del PPL – problema no factible (elaboración propia).

A partir de la solución gráfica de la Figura 127, se observa que no existe una región de soluciones factible para este PPL que de satisfacción a todas las restricciones.

En el método Simplex aplicado, se comenzó desde el origen por parte de la restricción 2, pero se tuvo que utilizar una variable artificial para corregir la infactibilidad asociada a la restricción 1, la que a su vez, al término del proceso, no pudo ser eliminada ya que no fue posible alcanzar la restricción 1.

En efecto, el valor final de la variable artificial fue uno, la distancia que hay entre la estrella amarilla del gráfico y el punto más cercano de la restricción 1 ($x_1 = 0$, $x_2 = 4$).

5.4. Método Simplex dual

El método Simplex comienza sus iteraciones a partir de una solución factible inicial en el origen, por lo que, si el problema no se encuentra en esta condición, existirá “no factibilidad de origen”, debiéndose aplicar el método Simplex fase I.

El método Simplex dual usa las soluciones básicas del problema dual que son factibles duales, pero no factibles primales. Luego, busca una solución óptima dual con el objetivo de ser factible en el problema primal, sustentado en el teorema dual.

5.4.1. Procedimiento del método Simplex dual

El método Simplex dual sigue un procedimiento similar al método Simplex tradicional o primal, con una diferencia menor en el criterio de ingreso y salida de la base.

- Modelar el PPL: conforme a la situación a ser resuelta, se procede a modelar el PPL. Para el caso de estudio, se utilizará el siguiente PPL.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & 2x_1 + x_2 \\
 \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Transformar el PPL: se transforman las restricciones al formato “lado izquierdo” \leq “lado derecho”, en donde “lado izquierdo” contiene todas las variables de decisión con sus coeficientes y el “lado derecho” las constantes de disponibilidad de recursos.

Para este caso, las restricciones se deberían multiplicar por -1 , excluyendo de esto a las restricciones de no negatividad.

Nótese que la función objetivo debe encontrarse en el sentido de “minimización”, opuesto a lo que ocurre en el método Simplex primal. La reformulación se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & 2x_1 + x_2 \\
 \text{s.a.:} \quad & -x_1 - x_2 \leq -3 \\
 & -x_1 - 2x_2 \leq -4 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Incorporar las variables de holgura: el PPL se configura en su forma estándar, es decir, las restricciones son satisfechas en igualdad agregando las variables de holgura o exceso que se requieran y, luego, componer la tabla Simplex (Figura 128).

En este caso, se utilizaron dos variables de holgura, conforme al sentido de las desigualdades de las restricciones.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & 2x_1 + x_2 + 0h_1 + 0h_2 \\
 \text{s.a.:} \quad & -x_1 - x_2 + h_1 = -3 \\
 & -x_1 - 2x_2 + h_2 = -4 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\
 & h_1 \geq 0, h_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_1	-1	-1	1	0	-3
h_2	-1	-2	0	1	-4
FO	2	1	0	0	0

Figura 128.- Tabla Simplex dual inicial (elaboración propia).

- Definir fila y columna pivote: el procedimiento a seguir utiliza un ordenamiento opuesto al procedimiento del método Simplex primal.

Primero, se define la “fila pivote”, a base de aquella fila que posee el coeficiente b_i “más negativo” dentro de los coeficientes del lado derecho de cada restricción.

Para este caso, la fila 2, correspondiente a la variable básica h_2 y que tiene el coeficiente $b_2 = -4$, es el seleccionado como fila pivote, la cual determinará la variable básica que dejará la base.

Luego, la columna pivote se determina a base de la prueba del ratio mínimo.

La variable que entra de la base es aquella con el valor absoluto del ratio entre los coeficientes de costo reducidos (CR) y los coeficientes de la fila pivote (a) que exclusivamente tengan valor negativo.

La columna pivote se define como aquella que tienen el menor ratio o proporción señalada dentro de las variables no básicas.

El ratio o proporción se define conforma a la siguiente expresión:

$$Ratio = \frac{CR_{\text{no básico positivo}}}{|a_{\text{negativo fila pivote}}|}$$

La Figura 129 muestra las operaciones de determinación de fila y columna pivote en la tabla Simplex dual.

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i	
h_1	-1	-1	1	0	-3	
h_2	-1	-2	0	1	-4	← Sale
FO	2	1	0	0	0	
Ratio	2/1	1/2				↑ Entra


Figura 129.- Tabla Simplex dual – fila y columna pivote (elaboración propia).

- Realizar el cambio de variables en la base: a través de las operaciones de transformación, se debe reconfigurar la tabla Simplex a fin de ingresar a la variable de la columna pivote a la base y sacar la variable de la fila pivote.

La Figura 130 presenta las transformaciones realizadas y la Figura 131 muestra la tabla Simplex resultante luego de las transformaciones.

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_2 \quad F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2 \quad F_3 \rightarrow F_3 - F_2$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_1	-1	-1	1	0	-3
h_2	-1	-2	0	1	-4
FO	2	1	0	0	0
Ratio	2/1	1/2			


Entra


 **Salir**

Figura 130.- Tabla Simplex dual – transformación de iteración 1 (elaboración propia).

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_1	-1/2	0	1	-1/2	-1
x_2	1/2	1	0	-1/2	2
FO	3/2	0	0	1/2	-2

Figura 131.- Tabla Simplex dual – final de iteración 1 (elaboración propia).

- Evaluar criterio de optimalidad: el criterio de optimalidad es que no existan variables básicas negativas.

En este caso, aún existe una variable básica negativa, por lo que es necesario iniciar una nueva iteración.

- Iniciar nuevas iteraciones: se realizará una nueva iteración.

Los resultados se presentan, primero, en la Figura 132 para el proceso de selección de fila y columna pivote y su transformación y, luego, en la Figura 133 a través de la tabla Simplex dual final.

$$F_1 \rightarrow -2F_1 \quad F_2 \rightarrow F_2 + \frac{1}{2}F_1 \quad F_3 \rightarrow F_3 - \frac{1}{2}F_1$$

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_1	-1/2	0	1	-1/2	-1
x_2	1/2	1	0	-1/2	2
FO	3/2	0	0	1/2	-2
Ratio	3			1	

◀ Sale

↑
Entra

Figura 132.- Tabla Simplex dual – transformación de iteración 2 (elaboración propia).

	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i
h_2	1	0	-2	1	2
x_2	1	1	-1	0	3
FO	1	0	1	0	-3

Figura 133.- Tabla Simplex dual – final de iteración 2 (elaboración propia).

En consideración a que no existen variables básicas con valores negativos (columna b_i), se ha obtenido la solución óptima, con un valor óptimo de $z = 3$ y un punto óptimo ($x_1 = 0, x_2 = 3, h_1 = 0, h_2 = 2$).

Este mismo ejemplo había sido resuelto mediante el método Simplex fase I, obteniéndose un resultado similar, lo que demuestra que es una alternativa válida para resolver problemas de minimización.

En la Figura 134 se muestra la comparación de las trayectorias del proceso del método Simplex primal (rojo), resuelto a base de la fase I y II, y del método Simplex dual (azul).

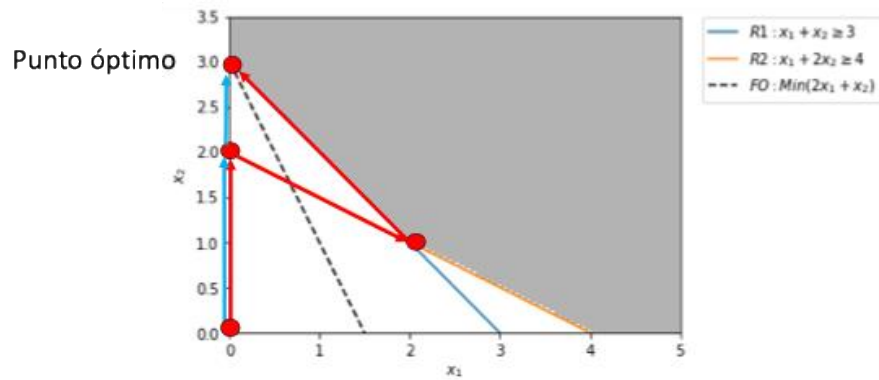


Figura 134.- Solución gráfica del PPL – comparación Simplex primal y dual (elaboración propia).

5.5. Método Simplex vectorial

El método Simplex de tipo vectorial corresponde a una versión del algoritmo basado en matrices y vectores en reemplazo de los componentes algebraicos estudiados hasta el momento.

Se basa en el hecho de que cada componente de un PPL puede ser subdividido y luego obtenida una solución básica factible a base de operatoria vectorial.

Vectorialmente, es posible representar el método Simplex primal y dual, conforme al mismo procedimiento estudiado en las secciones anteriores.

No obstante, existe un método denominado Simplex revisado, el que resuelve el PPL mediante operatoria matricial y vectorial, haciendo más eficiente el proceso computacional.

5.5.1. Composición vectorial de un PPL

Sea un PPL de la forma estándar, en que z representa la función objetivo:

$$\begin{aligned} \min_x z &= c^T x \\ \text{s.a.: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Se pueden establecer las siguientes afirmaciones relativas a un PPL:

- La región factible es el conjunto de restricciones del PPL. Geométricamente, es un poliedro convexo en \mathbb{R}^n .
- En cualquier vértice, las variables pueden dividirse en conjuntos de subíndices.
 - B , compuesta por m variables básicas $x_B \geq 0$.
 - N , compuesta por $n - m$ variables no básicas $x_N = 0$.
- Los componentes de c y las columnas de A son:
 - los costos básicos c_B y la matriz base B (equivalente a A_B).
 - los costos no básicos c_N y la matriz no-básica N (equivalente a A_N).
 - se obtiene una nueva representación de las restricciones $Ax = Bx_B + Nx_N$ y de la función objetivo $c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$.
- Resultados:
 - en cualquier vértice hay una partición $\{B, N\}$ de las variables, tal que B no es singular (determinante $\neq 0$).
 - existe una solución óptima del problema en un vértice.

A base de la descripción señalada, es posible reconfigurar el PPL, en su forma estándar empleando la estructura matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_x z &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.a.: } Bx_B + Nx_N &= b \\ x_B, x_N &\geq 0 \\ x_B &\in \mathbb{R}^m, x_N \in \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned}$$

Dado que, en un PPL, una solución básica factible existe en un vértice del poliedro convexo, se observan exactamente m variables básicas con valores distintos a cero y $n - m$ variables no básicas con un valor igual a cero.

Conforme a la partición $A = [B, N]$, si B es no singular y que $x_N = 0$, es posible escribir una solución básica factible:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } \hat{b} = B^{-1}b \geq 0$$

Para ejemplificar el concepto anterior, considere el siguiente PPL:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_3 - 3x_4 = 1/2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Los vectores y matrices que se desprenden del PPL son los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T$$

Si $m = 2$ y $n = 4$, entonces $x_B \in \mathbb{R}^2$ y $x_N \in \mathbb{R}^2$. Se seleccionan dos variables cualesquiera como variables básicas. En este caso, se toman x_1 y x_2 , por lo tanto:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad c_B = [1 \quad 2]^T \quad c_N = [3 \quad 4]^T$$

Entonces, la solución básica factible asociada a las variables básicas presentadas es la siguiente:

$$\hat{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \geq 0$$

Componiendo el vector de las variables de decisión, se obtiene la siguiente expresión:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si se quiere conocer el valor de la función objetivo, solo se debieran considerar las variables básicas x_B , ya que las variables no básicas x_N tienen un valor cero. Calculando el valor de la función objetivo en la solución básica factible obtenida es:

$$z = c^T x = c_B^T x_B$$

$$z = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 3/2$$

No obstante, no existe hasta ahora un criterio certificado para saber si, hasta el momento de evaluada la solución básica factible, se obtuvo una solución óptima o no.

En las siguientes etapas se profundizará en un algoritmo para aplicar el método Simplex mediante el uso de la notación vectorial.

Un PPL puede ser representado mediante una notación vectorial y matricial. De este modo, la tabla Simplex queda con la siguiente estructura (Figura 135):

	x_N	x_B	
x_B	A_N	A_B	b
	c_N^T	c_B^T	$z + 0$

Figura 135.- Estructura vectorial de la tabla Simplex (elaboración propia).

Es necesario recordar que existen m filas (restricciones) y n columnas (variables). Además, se suman $n - m$ columnas (variables) de holgura. Cada uno de los componentes de la tabla presentada en la Figura 135 tienen las siguientes dimensiones:

$$\begin{array}{lll}
 x_B \in \mathbb{R}^m & c_B \in \mathbb{R}^m & A_B \in \mathbb{R}^{m \times m} \\
 x_N \in \mathbb{R}^{n-m} & c_N \in \mathbb{R}^{n-m} & A_N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}
 \end{array}$$

Entonces, sea un PPL en notación vectorial:

$$\min_x c_B^T x_B + c_N^T x_N \quad (1)$$

$$\text{s.a.: } Bx_B + Nx_N = b \quad (2)$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

A partir de (2), se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\
 x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N
 \end{aligned} \quad (3)$$

Reemplazando en (1), se tiene:

$$c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \quad (4)$$

Definiendo las variables duales como $\lambda \in \mathbb{R}^m$:

$$\lambda^T B = c_B^T \rightarrow \lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

Definiendo los costos reducidos como:

$$d_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - \lambda^T N$$

Y la función objetivo:

$$\lambda^T b + d_N^T x_N \tag{5}$$

Finalmente, reemplazando las expresiones (3) y (5), se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 0x_B + d_N^T x_N = z - \lambda^T b \\ \text{s.a.:} \quad & Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Las derivaciones anteriores se pueden representar en la tabla Simplex, como solución al problema, de la siguiente manera (Figura 136):

	x_N	x_B	
x_B	$B^{-1}N$	I	$B^{-1}b$
	d_N^T	0	$z - \lambda^T b$

Figura 136.- Estructura vectorial de la tabla Simplex con la solución (elaboración propia).

5.5.2. Método Simplex revisado

El método Simplex revisado utiliza los conceptos vectoriales y matriciales recientemente expuestos para adaptar el algoritmo del método tradicional y hacerlo computacionalmente más eficiente.

El método Simplex revisado se puede sintetizar a base de siete pasos:

- Inicialización (paso 0):

Partición $A = [B \ N]$, donde $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular y $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

- Calcular las variables duales – BTRAN (paso 1):

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

- Calcular los costos reducidos – Price (paso 2):

$$d_N^T = c_N^T - \lambda^T N$$

- Elegir la variable no básica para entrar a la base – ChuzC (paso 3):

$$d_{N_q} = \min_j d_{N_j}$$

Si $d_{N_q} \geq 0$, entonces terminar: óptimo.

- Encontrar la columna actualizada \hat{N}_q – FTRAN (paso 4):

$$\text{Resolver } B\hat{N}_q = N_q$$

- Encontrar la variable básica para entrar a la base – ChuzR (paso 5):

$$\theta_{max} = \max(\theta: x_B - \theta \hat{N}_q \geq 0)$$

$$z = z_{inicial} + d_{N_q} \cdot \theta$$

Si $\theta_{max} = \infty$, entonces terminar: problema no acotado.

- Realizar un paso en la dirección Δx^T (paso 6):

$$\Delta x^T = (-\hat{N}_q^T, e_q^T)^T \rightarrow x := x + \theta_{max} \Delta x$$

- Actualizar la base; reemplazar la variable entrante a la base por la saliente (paso 7); luego, volver al paso 1.

Note que, en el paso 5, los valores de z serán negativos, pero su reemplazo en la tabla Simplex entregará un valor positivo. Esto se debe a que, en la solución vectorial, la función objetivo adopta el valor $z - \lambda^T b$, donde $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ es negativo debido a que los coeficientes c_B^T son también negativos, pues el criterio de selección de la columna pivote (variable de entrada a la base) es aquel con el coeficiente de costo reducido más negativo.

Con el propósito de comprender en profundidad el funcionamiento del algoritmo Simplex revisado, se utilizará el ejemplo inicial empleado en el método gráfico. Sea el siguiente PPL:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 \leq 180 \\ & 2x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La tabla Simplex asociada a este PPL, con cada matriz y vector que se requiere ya identificado, es la siguiente (Figura 137):

	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	b_i
h_1	1	0	1	0	0	180
h_2	0	2	0	1	0	150
h_3	3	2	0	0	1	300
	-3	-5	0	0	0	$z + 0$

Figura 137.- Tabla inicial Simplex revisado (elaboración propia).

A continuación, se comienza el método Simplex revisado con la iteración 1:

- Inicialización (paso 0):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 180 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$c_B^T = [0 \quad 0 \quad 0] \quad c_N^T = [-3 \quad -5]$$

- Calcular las variables duales – BTRAN (paso 1):

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

- Calcular los costos reducidos – Price (paso 2):

$$d_N^T = c_N^T - \lambda^T N = [-3 \quad -5] - [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [-3 \quad -5]$$

- Elegir la variable no básica para entrar a la base – ChuzC (paso 3):

$$d_{N_q} = \min_j d_{N_j} = \min(-3 \quad -5) = -5$$

Si $d_{N_q} \geq 0$, entonces terminar: óptimo.

Dado que $d_{N_2} < 0$, entonces, continuar e incrementar x_2 .

- Encontrar la columna actualizada \hat{N}_q – FTRAN (paso 4):

En este caso, se encuentra la columna actualizada $\hat{N}_{x_2} =$ columna de x_2 . Sea la matriz N , con la columna 2 en negrilla, como la seleccionada:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{2} \\ 3 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolver } \hat{N}_{x_1} = B^{-1}N_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolver } \hat{N}_{x_2} = B^{-1}N_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

La tabla Simplex queda de la siguiente forma (Figura 138):

	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	b_i
h_1	1	0	1	0	0	180
h_2	0	2	0	1	0	150
h_3	3	2	0	0	1	300
	-3	-5	0	0	0	$z + 0$

Figura 138.- Tabla Simplex revisado – iteración 1 paso 4 (elaboración propia).

Nótese que se actualizó la matriz de coeficientes no-básicos, pero los valores son los mismos que al inicio debido a que $B = I$.

- Encontrar la variable básica para entrar a la base – ChuzR (paso 5):

Dada la siguiente tabla Simplex (Figura 139):

	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	b_i
h_1	1	0	1	0	0	180
h_2	0	2	0	1	0	150
h_3	3	2	0	0	1	300
	-3	-5	0	0	0	$z + 0$

Figura 139.- Tabla Simplex revisado – iteración 1 paso 5 (elaboración propia).

En consideración a lo observado, la variable h_2 deja la base y la variable x_2 ingresa a la base. Los siguientes cálculos permiten actualizar la tabla Simplex:

$$\theta = x_2 = \min \left\{ \infty, \frac{150}{2}, \frac{300}{2} \right\} = 75$$

$$\theta_{max} = \max(\theta: \begin{bmatrix} 180 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix} - 75 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0)$$

Las variables se calculan con la expresión $x_B - \theta \hat{N}_q$, como sigue:

$$h_1 = 180 - 75 \cdot 0 = 180$$

$$h_2 = 150 - 75 \cdot 2 = 0 \rightarrow \text{deja la base}$$

$$h_3 = 300 - 75 \cdot 2 = 150$$

El valor de la función objetivo adopta el siguiente valor:

$$z = z_{inicial} + d_{N_{x_2}} \cdot \theta$$

$$z = 0 - 5 \cdot 75 = -375$$

Cabe señalar que $x_1 = 0$ se mantiene como variable no-básica y no integra la base.

- Realizar un paso en la dirección Δx^T (paso 6):

Incrementar x_2 en 75 y disminuir h_2 a cero. Al inicio de la siguiente iteración, x_1, h_2 son igual a cero, por ser no básicas. h_3 es igual a 150 y h_1 es igual a 180, siendo ambas básicas.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 75 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 = 180 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 150 \end{bmatrix} \quad z = -375$$

- Actualizar la base; reemplazar la variable entrante a la base por la saliente (paso 7); luego, volver al paso 1.

Se termina con la tabla Simplex ordenada, por variables básicas y no básicas, con los coeficientes originales. La Figura 140 muestra la tabla Simplex resultante.

	x_1	h_2	h_1	x_2	h_3	b_i
h_1	1	0	1	0	0	180
x_2	0	1	0	2	0	150
h_3	3	0	0	2	1	300
	-3	0	0	-5	0	z + 0

Figura 140.- Tabla Simplex revisado – iteración 1 paso 7 final (elaboración propia).

Independientemente de haber finalizado la iteración 1 del método Simplex revisado, es necesario iniciar la segunda iteración para comprobar si se alcanzó la solución óptima o es necesario continuar. La iteración 2 se desarrolla como sigue:

- Inicialización (paso 0):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_N^T = [-3 \quad 0] \quad c_B^T = [0 \quad -5 \quad 0]$$

- Calcular las variables duales – BTRAN (paso 1):

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad -5 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -5/2 \quad 0]$$

- Calcular los costos reducidos – Price (paso 2):

$$d_N^T = c_N^T - \lambda^T N = [-3 \quad 0] - [0 \quad -5/2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = [-3 \quad 5/2]$$

- Elegir la variable no básica para entrar a la base – ChuzC (paso 3):

$$d_{N_q} = \min_j d_{N_j} = \min(-3 \quad 5/2) = -3$$

Si $d_{N_q} \geq 0$, entonces terminar: óptimo. Dado que $d_{N_2} < 0$, entonces, continuar e incrementar x_1 .

- Encontrar la columna actualizada \hat{N}_q – FTRAN (paso 4):

En este caso, se encuentra la columna actualizada $\hat{N}_{x_1} =$ columna de x_1 . Sea la matriz N , con la columna 1 en negrilla, como la seleccionada:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolver } \hat{N}_{x_1} = B^{-1}N_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolver } \hat{N}_{h_2} = B^{-1}N_{h_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La tabla Simplex, con la matriz de vectores no básica actualizada, queda de la siguiente forma (Figura 141):

	x_1	h_2	h_1	x_2	h_3	b_i
h_1	1	0	1	0	0	180
x_2	0	1/2	0	2	0	75
h_3	3	-1	0	2	1	150
	-3	5/2	0	-5	0	$z + 375$

Valores de variables básicas del paso 5 de la iteración 1.

Figura 141.- Tabla Simplex revisado – iteración 2 paso 4 (elaboración propia).

- Encontrar la variable básica para entrar a la base – ChuzR (paso 5):

Dada la siguiente tabla Simplex (Figura 142):

	x_1	h_2	h_1	x_2	h_3	b_i
h_1	1	0	1	0	0	180
x_2	0	1/2	0	2	0	75
h_3	3	-1	0	2	1	150
	-3	5/2	0	-5	0	$z + 375$

Figura 142.- Tabla Simplex revisado – iteración 1 paso 5 (elaboración propia).

En consideración a lo observado, la variable h_3 deja la base y la variable x_1 ingresa a la base. Los siguientes cálculos permiten actualizar la tabla Simplex:

$$\theta = x_1 = \min \left\{ \frac{180}{1}, \infty, \frac{150}{3} \right\} = 50$$

$$\theta_{max} = \max(\theta: \begin{bmatrix} 180 \\ 75 \\ 150 \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0)$$

Las variables se calculan con la expresión $x_B - \theta \hat{N}_q$, como sigue:

$$h_1 = 180 - 50 \cdot 1 = 130$$

$$x_2 = 75 - 50 \cdot 0 = 75$$

$$h_3 = 150 - 50 \cdot 3 = 0 \rightarrow \text{deja la base}$$

El valor de la función objetivo adopta el siguiente valor:

$$z = z_{inicial} + d_{N_{x_2}} \cdot \theta$$

$$z = -375 - 3 \cdot 50 = -525$$

Cabe señalar que $h_2 = 0$ se mantiene como variable no-básica y no integra la base.

- Realizar un paso en la dirección Δx^T (paso 6):

Incrementar x_1 en 50 y disminuir h_3 a cero. Al inicio de la siguiente iteración, h_2 y h_3 son igual a cero, por ser no básicas. h_1 es igual a 130 y es variable básica.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = 50 \\ x_2 = 75 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 = 130 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{bmatrix} \quad z = -525$$

- Actualizar la base; reemplazar la variable entrante a la base por la saliente (paso 7); luego, volver al paso 1.

Se termina con la tabla Simplex ordenada, por variables básicas y no básicas, con los coeficientes originales. La Figura 143 muestra la tabla Simplex resultante.

	h_3	h_2	h_1	x_2	x_1	b_i
h_1	0	0	1	0	1	180
x_2	0	1	0	2	0	150
x_1	1	0	0	2	3	300
	0	0	0	-5	-3	z + 0

Figura 143.- Tabla Simplex revisado – iteración 2 paso 7 final (elaboración propia).

La iteración 3 se desarrolla para comprobar si se alcanzó la solución óptima o es necesario continuar con el proceso:

- Inicialización (paso 0):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$c_N^T = [0 \quad 0] \quad c_B^T = [0 \quad -5 \quad -3]$$

- Calcular las variables duales – BTRAN (paso 1):

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad -5 \quad -3] \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = [0 \quad -3/2 \quad -1]$$

- Calcular los costos reducidos – Price (paso 2):

$$d_N^T = c_N^T - \lambda^T N = [0 \quad 0] - [0 \quad -3/2 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 3/2]$$

- Elegir la variable no básica para entrar a la base – ChuzC (paso 3):

$$d_{N_q} = \min_j d_{N_j} = \min(1 \quad 3/2) = 1$$

Dado que $d_{N_q} \geq 0$, entonces terminar: solución óptima.

El punto óptimo es $(x_1 = 50, x_2 = 75, h_1 = 130, h_2 = 0, h_3 = 0)$ y el valor óptimo es 525.

6. MODELOS DE ASIGNACIÓN Y TRANSPORTE

En Investigación Operacional, los problemas de asignación y transporte corresponden a una familia de problemas combinatorios, que tienen propiedades especiales que los convierten en un objeto de estudio mandatorio en los cursos introductorios de la disciplina.

El propósito de ambos modelos es representar un sistema de oferta y demanda. En tal sentido, las transacciones que se realizan entre el agente suministrador y el agente demandante tienen un costo, por lo que es del interés del tomador de decisiones que el costo total de las transacciones sea el menor posible, a fin de satisfacer la demanda agregada.

Consecuentemente, los modelos de asignación y transporte buscan minimizar el costo de las transacciones realizadas, sujetos a la satisfacción total de la demanda, basado en las capacidades de suministro que tengan los agentes relacionados a esta función.

Un modelo de asignación tiene como objetivo enlazar un recurso disponible con una necesidad determinada. Por ejemplo, un recurso puede ser asignado a una tarea que se requiera desarrollar o a un espacio por completar. No obstante, la asignación se realiza conforme a la demanda existente que, en el caso del problema de asignación, es unitaria, al igual que la disponibilidad de recursos.

Un modelo de transporte busca satisfacer la demanda total de recursos al mínimo costo, basado en la disponibilidad de dichos recursos por parte de los agentes suministradores. Entonces, el transporte de elementos y la demanda existente es mayor o igual a uno, difiriendo parcialmente con los modelos de asignación. Asimismo, el costo de transporte es proporcional al número de elementos que transitan por cada ruta.

Ambos modelos poseen una propiedad que los hace distintivos dentro de los problemas de la Investigación Operacional.

Los problemas de asignación tienen la propiedad de “unimodularidad”, lo que significa que, aunque se utilice una variable de decisión no-negativa y que tenga la posibilidad de tomar valores decimales ($x \geq 0$) en desmedro de una variable binaria ($x \in \{0, 1\}$), el valor final será unitario, es decir, cero o uno.

Los problemas de transporte tienen igualmente la propiedad denominada de “integralidad”. Esto significa que, independientemente a que las variables de decisión sean no-negativas y puedan adoptar cualquier valor ($x \geq 0$), siempre el punto óptimo resultará en números enteros ($x \in \mathbb{R}_0^+$).

En términos geométricos, para el problema de asignación y de transporte, las aristas del poliedro que configura la región de soluciones factibles son enteras, no importando que las variables de decisión sean continuas. Esto implica que, al aplicar el método Simplex, todas las soluciones factibles serán valores enteros, permitiendo que se cumplan las propiedades de unimodularidad e integralidad, respectivamente.

6.1. Problema de asignación

El *problema de asignación* es un tipo especial de problema de programación lineal en que los recursos disponibles son destinados a la ejecución de tareas. Un problema de asignación requiere que se cumplan las siguientes condiciones.

- El número de recursos asignados es igual al número de tareas requeridas.
- A cada recurso asignado se le destina solo una tarea.
- Cada tarea debe ser realizada por solo un recurso asignado.

- Existe un costo c_{ij} asociado al recurso asignado ($i = 1, 2, \dots, m$) que realiza la tarea ($j = 1, 2, \dots, n$).
- El propósito de este modelo es determinar cómo realizar las m asignaciones de recursos para minimizar el costo total de asignación.

La Figura 144 representa gráficamente el problema de asignación, considerando m recursos a ser asignados en n tareas requeridas. Cabe señalar que el caso base de estudio considera que $m = n$, produciéndose una asignación uno a uno. El costo de asignación de un recurso en una tarea c_{ij} no necesariamente es homogéneo, es decir, puede variar según el recurso y la tarea.

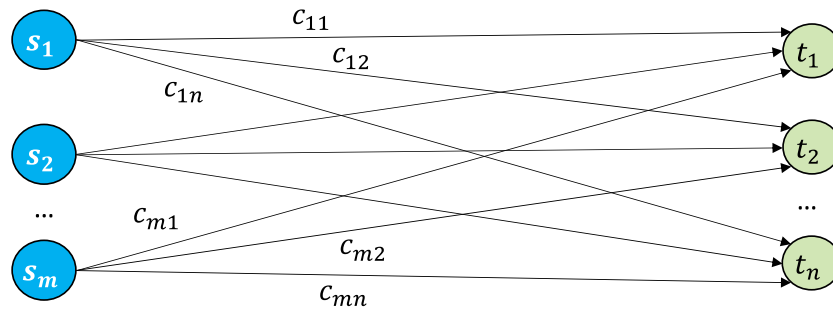


Figura 144.- Problema de asignación (elaboración propia).

		Costo por unidad asignada				Recursos
		Destino				
		1	2	...	n	
Origen	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1

	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	1
Demanda		1	1	...	1	

Figura 145.- Matriz del problema de asignación (elaboración propia).

Los parámetros del problema de asignación se pueden representar en una matriz que considere tanto el recurso como la tarea, de la forma en que se muestra en la Figura 145.

6.1.1. Formulación del problema de asignación

El problema general de asignación se compone de una función objetivo y dos restricciones principales. Igualmente, dos conjuntos, un parámetro y una variable de decisión que permiten su caracterización.

- Conjuntos: se definen dos conjuntos, uno de los recursos disponibles (origen) y otro de las tareas a ejecutar o cubrir (destino).

- $I \in \{1, \dots, m\}$: conjunto de nodos de origen que representan los recursos disponibles.

- $J \in \{1, \dots, n\}$: conjunto de nodos de destino que representan las tareas a desarrollar.

- Parámetro: el único parámetro de este modelo es el costo de asignación, definido como:

c_{ij} : costo (en unidades monetarias) de asignar una unidad de recurso a una tarea.

- Variables de decisión: en el problema de asignación, se define solo una variable de decisión, de la siguiente forma:

x_{ij} : variable continua que define la cantidad de recursos i asignados a una tarea j .

El modelo de optimización del problema general de asignación se representa a través del siguiente PPL:

- Función objetivo: minimiza el costo total de asignación de los recursos a las tareas.

$$\min_x \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

- Restricciones: la primera restricción define que, para cada recurso disponible, la suma o cantidad de asignaciones realizadas a una tarea debe ser exactamente una. La segunda restricción establece que cada tarea requerida a ser ejecutada debe estar cubierta exactamente por un recurso.

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J$$

- Restricción de no-negatividad: determina que la variable de decisión pertenece a los números reales-positivos, incluyendo al cero, es decir, no-negativo.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$$

6.1.2. Ejemplo del problema de asignación

Considere el siguiente ejemplo: un equipo de tres especialistas en mantenimiento de motores Diesel, localizados en diferentes ciudades del país, deben atender tres motores localizados en tres diferentes puntos, no necesariamente las

mismas ciudades en las que ellos trabajan. La matriz de la Figura 146 muestra el costo en dólares americanos de cada hora/hombre de trabajo de cada mecánico en cada motor, considerado su ubicación.

	1	2	3
1	13	16	12
2	15	M	13
3	5	7	10

Figura 146.- Ejemplo de motores Diesel – problema general de asignación (elaboración propia).

Cabe señalar que la letra M representa un número muy grande que define una asignación que no es factible realizar.

El modelo de programación lineal del problema de asignación para este ejemplo es el siguiente:

$$\min_x (13x_{11} + 16x_{12} + 12x_{13} + 15x_{21} + Mx_{22} + 13x_{23} + 5x_{31} + 7x_{32} + 10x_{33})$$

$$\text{s.a. } \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} &\geq 0 \end{aligned}$$

Al analizar la formulación del PPL asociado al problema de asignación, resulta interesante que las restricciones principales tienen una estructura especial, la que se observa en la Figura 147:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	b
1	1	1							= 1
			1	1	1				= 1
						1	1	1	= 1
1			1			1			= 1
	1			1			1		= 1
		1						1	= 1

Figura 147.- Estructura del problema general de asignación (elaboración propia).

En la estructura presentada se observa la existencia de simetría entre las restricciones. Las tres primeras restricciones corresponden a una suma de variables basada en columnas (suma de columnas por cada fila) y las tres siguientes en el caso opuesto (suma de filas por cada columna). Igualmente, el parámetro de disponibilidad de recursos b es igual a uno debido a que se dispone solo de un recurso para ejecutar la tarea requerida.

Igualmente, la suma basada en filas y columnas de las variables de decisión asegura que se respetará una asignación uno a uno de recursos, ya que, para toda tarea a ejecutar, solo un recurso puede utilizarse y, por cada tarea a asignar, exactamente se debe utilizar un recurso.

6.1.3. Problema de asignación no balanceado

En la formulación de un PPL del problema de asignación se puede dar la situación, en la cual, existan más recursos disponibles que tareas a ejecutar o viceversa ($n > m$). Para el primer caso, se plantea el siguiente PPL:

$$\begin{aligned}
& \min_x \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \\
& \quad \quad \sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \\
& \quad \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

En esta formulación, la totalidad de las tareas deben ser cubiertas por un recurso (restricción 1), pero para cada recurso, la suma de las asignaciones a una tarea a lo más será igual a uno. Esto implica que $n - m$ recursos quedarán sin ser utilizados, cubriendo la totalidad de las tareas dispuestas.

En el caso de existir más tareas a ejecutar que recursos disponibles, la formulación del problema de asignación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \min_x \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I \\
& \quad \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \\
& \quad \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

Dado que existen más tareas que recursos disponibles ($m > n$), se deberá asumir que habrá algunas de aquellas tareas ($m - n$) que no se podrán ejecutar, siendo el criterio de selección aquel de mínimo costo.

6.1.4. Método húngaro (caso $m = n$)

El método húngaro corresponde a un algoritmo para resolver el problema de asignación. Ostenta dicho nombre porque inicialmente fue formulado por dos matemáticos húngaros, Dénes König y Jenő Egerváry, posteriormente fue reformulado y publicado por Harold W. Kuhn (1955) y, luego, revisado por James Munkres en 1957. La complejidad computacional del algoritmo es $\mathcal{O}(|N|^3)$, con $|N|$ correspondiente a la cantidad total de nodos de la red.

Para aplicar el método húngaro, en una matriz se tabulan todos los coeficientes de costo c_{ij} de la función objetivo. Por ejemplo, se presenta el siguiente problema (Figura 148):

	t_1	t_2	t_3
s_1	15	10	9
s_2	9	15	10
s_3	10	12	8

Figura 148.- Matriz de costo, problema de asignación (elaboración propia).

Note que se utilizará una nomenclatura más general que considera a las tareas como fuentes de asignación (s_i de fuente en inglés) y a los recursos como destino (t_j).

El método húngaro para la resolución de un problema de asignación considera los siguientes pasos:

- Paso 1: busque el mínimo elemento en cada fila y réstelo a todos los elementos de dicha fila.

- Paso 2: busque el mínimo elemento en cada columna y réstelo a todos los elementos de dicha columna.
- Paso 3: cubra con una línea todos los elementos ceros con el mínimo de rectas.
- Paso 4: si el número mínimo de rectas que los cubren es igual al número de filas/columnas, se obtuvo la asignación óptima.
- Paso 5: si el número mínimo de rectas es menor a la dimensión de la matriz, se resta a los elementos descubiertos el menor de ellos y ese elemento se suma a los cubiertos por la intersección de dos rectas, para comenzarse nuevamente por el paso 1.

Ejemplo 1:

A modo de clarificar el procedimiento, se utilizará el ejemplo planteado en la Figura 148.

- Paso 1: busque el mínimo elemento en cada fila y réstelo a todos los elementos de dicha fila.

Primero, se identifican los costos mínimos por cada fila, presentados en color rojo en la Figura 149:

	t_1	t_2	t_3	Mínimo por filas
s_1	15	10	9	9
s_2	9	15	10	9
s_3	10	12	8	8

Figura 149.- Método húngaro – paso 1 mínimo por filas (elaboración propia).

Luego, se resta cada mínimo de las filas a toda la fila, conforme a lo siguiente (Figura 150):

	t_1	t_2	t_3
s_1	$15 - 9 = 6$	$10 - 9 = 1$	$9 - 9 = 0$
s_2	$9 - 9 = 0$	$15 - 9 = 6$	$10 - 9 = 1$
s_3	$10 - 8 = 2$	$12 - 8 = 4$	$8 - 8 = 0$

Figura 150.- Método húngaro – paso 1 resta de elementos por fila (elaboración propia).

El resultado del paso 1, al restar los mínimos por fila, se muestra en la Figura 151.

	t_1	t_2	t_3
s_1	6	1	0
s_2	0	6	1
s_3	2	4	0

Figura 151.- Método húngaro – paso 1 resta de elementos por fila (elaboración propia).

- Paso 2: busque el mínimo elemento en cada columna y réstelo a todos los elementos de dicha columna.

	t_1	t_2	t_3
s_1	6	1	0
s_2	0	6	1
s_3	2	4	0
Mín. columnas	0	1	0

Figura 152.- Método húngaro – paso 2 mínimo por columnas (elaboración propia).

Se identifican los costos mínimos por cada columna, a partir de la tabla final del paso 1, los que son presentados en color rojo en la Figura 152.

Luego, se resta cada mínimo de las columnas a toda la columna respectiva, conforme a lo siguiente (Figura 153):

	t_1	t_2	t_3
s_1	$6 - \mathbf{0} = \mathbf{6}$	$\mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$	$\mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$
s_2	$\mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$	$6 - \mathbf{1} = \mathbf{5}$	$1 - \mathbf{0} = \mathbf{1}$
s_3	$2 - \mathbf{0} = \mathbf{2}$	$4 - \mathbf{1} = \mathbf{3}$	$\mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Figura 153.- Método húngaro – paso 2 resta de elementos por columna (elaboración propia).

El resultado del paso 2, al restar los mínimos por columna, se muestra en la Figura 154.

	t_1	t_2	t_3
s_1	6	0	0
s_2	0	5	1
s_3	2	3	0

Figura 154.- Método húngaro – paso 2 resta de elementos por columna (elaboración propia).

- Paso 3: cubra con una línea todos los elementos ceros con el mínimo de rectas.

Note que se cubrieron todas las celdas que contienen valores igual a cero con la menor cantidad de rectas posibles (Figura 155).

	t_1	t_2	t_3
s_1	6	0	0
s_2	0	5	1
s_3	2	3	0

Figura 155.- Método húngaro – paso 3 (elaboración propia).

- Paso 4: si el número mínimo de rectas que los cubren es igual al número de filas/columnas, se obtuvo la asignación óptima.

Para contextualizar este paso y las conclusiones que se puedan obtener del resultado, cabe señalar que:

- Solo puede asignarse una tarea (fuente) a cada recurso (destino), por ende solo debe existir un 0 por fila y columna.
- Para la asignación, se selecciona primero el 0 que sea único para filas y columnas.

La Figura 156 muestra la asignación propuesta. La dimensión de la matriz de costos es $dim = 3$, la cual, es igual a la cantidad mínima de rectas que cubren a todos los ceros. Entonces, en color azul se muestran las asignaciones obtenidas en la denominada matriz de costos reducidos.

	t_1	t_2	t_3
s_1	6	0	0
s_2	0	5	1
s_3	2	3	0

Figura 156.- Método húngaro – paso 4 matriz de costos reducidos (elaboración propia).

Una vez obtenida la asignación, se reemplazan los costos reducidos de la matriz anterior con los costos originales c_{ij} del problema de asignación, obteniéndose lo siguiente (Figura 157):

	t_1	t_2	t_3
s_1	15	10	9
s_2	9	15	10
s_3	10	12	8

Figura 157.- Método húngaro – paso 4 costo final (elaboración propia).

La solución óptima está dada por el punto óptimo $x_{12} = x_{21} = x_{33} = 1$, con un valor óptimo igual a $10 + 9 + 8 = 27$.

- Paso 5: no aplica a este ejemplo.

Ejemplo 2:

En el caso anterior (ejemplo 1), la solución óptima fue alcanzada luego de una iteración, por lo que no fue necesario ejecutar el paso 5. Con el propósito de explicar su funcionamiento, se presentará el ejemplo 2. Sea el siguiente PPL representado por la tabla de costos de la Figura 158:

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	14	5	8	7
s_2	2	12	6	5
s_3	7	8	3	9
s_4	2	4	6	10

Figura 158.- Matriz de costo problema de asignación – ejemplo 2 (elaboración propia).

Iteración 1:

- Paso 1: busque el mínimo elemento en cada fila y réstelo a todos los elementos de dicha fila.

Primero, se identifican los costos mínimos por cada fila, presentados en color rojo en la Figura 159:

	t_1	t_2	t_3	t_4	Mínimo filas
s_1	14	5	8	7	5
s_2	2	12	6	5	2
s_3	7	8	3	9	3
s_4	2	4	6	10	2

Figura 159.- Método húngaro – iteración 1 paso 1 mínimo por filas (elaboración propia).

Luego, se resta cada mínimo de las filas a toda la fila, conforme a lo siguiente (Figura 160):

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	$14 - 5 = 9$	$5 - 5 = 0$	$8 - 5 = 3$	$7 - 5 = 2$
s_2	$2 - 2 = 0$	$12 - 2 = 10$	$6 - 2 = 4$	$5 - 2 = 3$
s_3	$7 - 3 = 4$	$8 - 3 = 5$	$3 - 3 = 0$	$9 - 3 = 6$
s_4	$2 - 2 = 0$	$4 - 2 = 2$	$6 - 2 = 4$	$10 - 2 = 8$

Figura 160.- Método húngaro – iteración 1 paso 1 resta de elementos por fila (elaboración propia).

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	9	0	3	2
s_2	0	10	4	3
s_3	4	5	0	6
s_4	0	2	4	8

Figura 161.- Método húngaro – iteración 1 paso 1 resta de elementos por fila (elaboración propia).

El resultado del paso 1, al restar los mínimos por fila, se muestra en la Figura 161.

- Paso 2: busque el mínimo elemento en cada columna y réstelo a todos los elementos de dicha columna.

Se identifican los costos mínimos por cada columna, a partir de la tabla final del paso 1, los que son presentados en color rojo en la Figura 162:

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	9	0	3	2
s_2	0	10	4	3
s_3	4	5	0	6
s_4	0	2	4	8
Mín. columnas	0	0	0	2

Figura 162.- Método húngaro – iteración 1 paso 2 mínimo por columnas (elaboración propia).

Luego, se resta cada mínimo de las columnas a toda la columna respectiva, conforme a lo siguiente (Figura 163):

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	9	0	3	2 - 2 = 0
s_2	0	10	4	3 - 2 = 1
s_3	4	5	0	6 - 2 = 4
s_4	0	2	4	8 - 2 = 6

Figura 163.- Método húngaro – iteración 1 paso 2 resta de elementos por columna (elaboración propia).

El resultado del paso 2, al restar los mínimos por columna, se muestra en la Figura 164.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	9	0	3	0
s_2	0	10	4	1
s_3	4	5	0	4
s_4	0	2	4	6

Figura 164.- Método húngaro – iteración 1 paso 2 resta de elementos por columna (elaboración propia).

- Paso 3: cubra con una línea todos los elementos ceros con el mínimo de rectas.

Note que se cubrieron todas las celdas que contienen valores igual a cero con la menor cantidad de rectas posibles, pero en un número menor a la dimensión de la matriz (Figura 165).

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	9	0	3	0
s_2	0	10	4	1
s_3	4	5	0	4
s_4	0	2	4	6

Figura 165.- Método húngaro – iteración 1 paso 3 (elaboración propia).

- Paso 4: si el número mínimo de rectas que los cubren es igual al número de filas/columnas, se obtuvo la asignación óptima.

La asignación actual no es la óptima debido a que no cumple el criterio de igualdad entre el número de rectas que cubren los “ceros” de la matriz y la dimensión de esta última.

- Paso 5: si el número mínimo de rectas es menor a la dimensión de la matriz, se resta a los elementos descubiertos el menor de ellos y ese elemento se suma a los cubiertos por dos rectas (intersecciones) y se comienza nuevamente por el paso 1.

El número descubierto de menor valor es aquel que se encuentra en la intersección de s_2 con t_4 con un valor igual a 1. En la Figura 166, se muestra la matriz con el mínimo valor descubierto.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	9	0	3	0
s_2	0	10	4	1
s_3	4	5	0	4
s_4	0	2	4	6

Figura 166.- Método húngaro – iteración 1 paso 5 con menor valor descubierto (elaboración propia).

Al aplicar la resta de dicha cifra a las celdas descubiertas y la suma a las intersecciones de rectas, se obtiene la siguiente matriz (Figura 167):

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	10	0	4	0
s_2	0	9	4	0
s_3	4	4	0	3
s_4	0	1	4	5

Figura 167.- Método húngaro – iteración 1 paso 5 tabla final (elaboración propia).

Iteración 2:

- Paso 1: busque el mínimo elemento en cada fila y réstelo a todos los elementos de dicha fila.

Dado que los elementos mínimos de todas las filas son iguales a cero, la matriz queda inalterada ya que las restas de cada una de ellas es por el valor cero. El resultado del paso 1, se muestra en la Figura 168.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	10	0	4	0
s_2	0	9	4	0
s_3	4	4	0	3
s_4	0	1	4	5

Figura 168.- Método húngaro – iteración 2 paso 1 resta de elementos por fila (elaboración propia).

- Paso 2: busque el mínimo elemento en cada columna y réstelo a todos los elementos de dicha columna.

Al igual que en el paso 1, los mínimos elementos de cada columna son iguales a cero, por lo que la matriz igualmente queda inalterada. El resultado del paso 2, al restar los mínimos por columna, se muestra en la Figura 169.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	10	0	4	0
s_2	0	9	4	0
s_3	4	4	0	3
s_4	0	1	4	5

Figura 169.- Método húngaro – iteración 2 paso 2 resta de elementos por columna (elaboración propia).

- Paso 3: cubra con una línea todos los elementos ceros con el mínimo de rectas.

Note que se cubrieron todas las celdas que contienen valores igual a cero con la menor cantidad de rectas posibles (Figura 170).

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	10	0	4	0
s_2	0	9	4	0
s_3	4	4	0	3
s_4	0	1	4	5

Figura 170.- Método húngaro – iteración 2 paso 3 (elaboración propia).

- Paso 4: si el número mínimo de rectas que los cubren es igual al número de filas/columnas, se obtuvo la asignación óptima.

	t_1	t_2	t_3	t
s_1	10	0	4	0
s_2	0	9	4	0
s_3	4	4	0	3
s_4	0	1	4	5

Figura 171.- Método húngaro – iteración 2 paso 4 matriz de costos reducidos (elaboración propia).

La Figura 171 muestra la asignación propuesta. La dimensión de la matriz de costos es $dim = 4$, la cual es igual a la cantidad mínima de rectas que cubren a todos los ceros, por lo que se alcanzó la solución óptima. Entonces, en color

azul se muestran las asignaciones obtenidas en la denominada matriz de costos reducidos.

Una vez obtenida la asignación, se reemplazan los costos reducidos de la matriz anterior con los costos originales c_{ij} del problema de asignación, obteniéndose lo siguiente (Figura 172):

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	14	5	8	7
s_2	2	12	6	5
s_3	7	8	3	9
s_4	2	4	6	10

Figura 172.- Método húngaro – iteración 2 paso 4 costo final (elaboración propia).

La solución óptima está dada por el punto óptimo $x_{12} = x_{24} = x_{33} = x_{41} = 1$, con un valor óptimo igual a $5 + 5 + 3 + 2 = 15$.

- Paso 5: no aplica en este caso, debido a que ya se alcanzó la solución óptima.

6.1.5. Método húngaro (caso $m \neq n$)

Un problema de asignación con una cantidad igual de recursos y tareas a ejecutar corresponde a un caso ideal, en el que la asignación es uno a uno, es decir, no quedan recursos disponibles ni tareas sin ejecutar.

Sin embargo, es posible encontrar problemas en los cuales la cantidad de recursos disponibles es menor a las tareas a ejecutar

o viceversa. En el primer caso, existirá alguna de las tareas que no se ejecutarán, pudiendo considerarse no factible si es que la materialización de las tareas es mandatorio. En el segundo caso, se evidencia un exceso de recursos para cumplir con las tareas requeridas, por lo que la asignación privilegiará aquellas que generen el menor costo global.

En cualquiera de ambos casos, la representación de la matriz de costo de asignación tendrá una fila o una columna menos, respectivamente, que una matriz cuadrada.

Entonces, la estrategia a seguir consiste en agregar dicha fila o columna faltante con valor igual a cero. Por ejemplo, el siguiente problema de asignación presenta el segundo caso, en el cual, se disponen de más recursos que tareas a ejecutar (Figura 173).

	t_1	t_2	t_3
s_1	24	45	25
s_2	33	48	23
s_3	24	52	20
s_4	30	56	21

Figura 173.- Método húngaro – tabla inicial caso $m > n$ (elaboración propia).

Para iniciar las iteraciones, es necesario agregar una cuarta columna con valores iguales a cero. Esto se interpreta de la siguiente forma: el costo de asignar un recurso s_i a una tarea t_j es cero, por lo que la asignación del recurso más caro, entre aquellos disponibles, se realizará a la tarea ficticia con valor cero.

La Figura 174 muestra la tabla ya configurada:

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	24	45	25	0
s_2	33	48	23	0
s_3	24	52	20	0
s_4	30	56	21	0

Figura 174.- Método húngaro – tabla inicial configurada caso $m > n$ (elaboración propia).

A base de dicha tabla, se inician las iteraciones del método húngaro de asignación. El desarrollo del ejercicio se deja para ser realizado por el lector. No obstante, la determinación del elemento mínimo por filas no se ejecuta debido a que, al agregar una columna con ceros, tomará necesariamente un valor igual a cero. En la Figura 175, se presenta la tabla final de asignación, con un valor óptimo de 90.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	24	45	25	0
s_2	33	48	23	0
s_3	24	52	20	0
s_4	30	56	21	0

Figura 175.- Método húngaro – tabla final caso $m > n$ (elaboración propia).

6.2. Problema de transporte

La formulación de un problema de transporte es similar a un problema de asignación, solo que en esta ocasión la demanda de tareas es ahora mayor o igual a uno.

Sea un problema en el que se identifican una serie de nodos de origen (m nodos) y nodos de destino (n nodos), los nodos de

origen tienen disponibles elementos o artículos que deben ser transportados, a un costo dado, a los nodos de destino, los que demandan dichos productos.

Cada nodo de origen tiene que distribuir cierto suministro de unidades a los nodos de destinos y cada nodo de destino tiene cierta demanda de unidades que debe ser satisfecha. El modelo de un problema de transporte se basa en los siguientes supuestos sobre los suministros y demandas.

- Supuesto de requerimientos: cada nodo de origen tiene un suministro fijo de unidades, el cual debe distribuirse completo entre los nodos de destino (con s_i se denota el número de unidades que suministra el origen i , para $i = 1, 2, \dots, m$).

De manera similar, el nodo de destino tiene una demanda fija de unidades y debe satisfacerse por los nodos de origen (con d_j se denota el número de unidades que recibe el destino j , para $j = 1, 2, \dots, n$).

- Supuesto de costo: el costo de distribuir unidades desde un nodo de origen a un nodo de destino es directamente proporcional al número de unidades distribuidas. Por tanto, este costo es igual al costo unitario de distribución multiplicado por el número de unidades distribuidas (el costo unitario del origen i al destino j se denota por c_{ij}).

La Figura 176 representa esquemáticamente un problema de transporte, en el cual los nodos de origen tienen una capacidad s_i y los nodos de destino una demanda d_j .

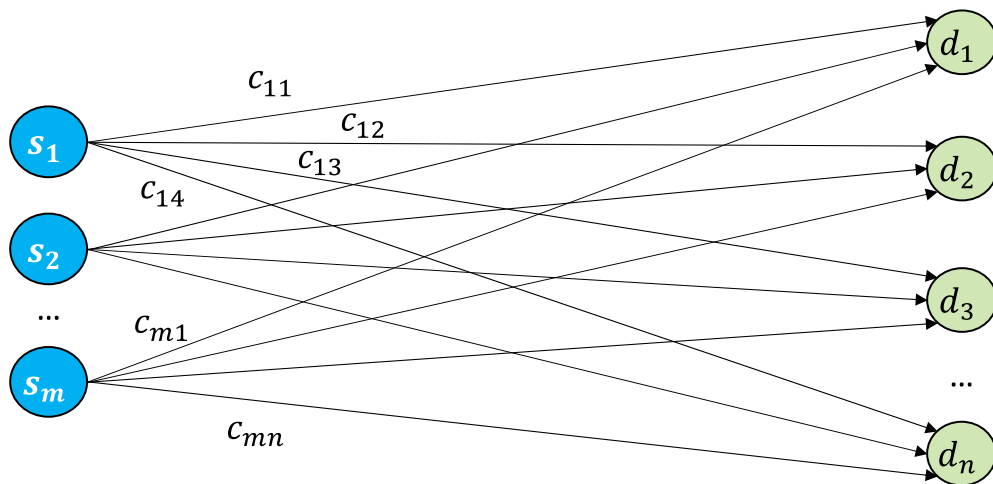


Figura 176.- Problema de transporte (elaboración propia).

Los nodos de origen son también denominados nodos de suministro y los nodos de destino como nodos de demanda.

Para un problema de transporte, es necesario que exista un balance entre los suministros y demandas. Igualmente, debe existir un costo de asignar productos desde una fuente de suministros (origen) a un nodo de demanda.

Los parámetros del problema de transporte se pueden representar en una matriz que considere los nodos de suministro y de demanda. En la Figura 177 se muestra la estructura de la matriz del problema de transporte:

		Costo por unidad asignada				Recursos
		Destino				
		1	2	...	n	
Origen	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2

	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m
Demanda		d_1	d_2	...	d_n	

Figura 177.- Matriz del problema de transporte (elaboración propia).

6.2.1. Formulación del problema de transporte

Al igual que el problema general de asignación, el problema general de transporte se compone de una función objetivo y dos restricciones principales. Igualmente, dos conjuntos, un parámetro y una variable de decisión permiten su caracterización.

- Conjuntos: se definen dos conjuntos, uno de los nodos de suministro y otro de los nodos de demanda.

- $I \in \{1, \dots, m\}$: conjunto de nodos de suministro.
- $J \in \{1, \dots, n\}$: conjunto de nodos de demanda.

- Parámetros: se definen los parámetros de costo de transporte, cantidad de elementos disponibles de suministro y cantidad de demanda.

- c_{ij} : costo (en unidades monetarias) de transportar una unidad de recurso desde un nodo de suministro a un nodo de demanda.
- s_i : cantidad de elementos (unidades) disponibles para ser distribuidas desde los nodos de suministro a los nodos de demanda.
- d_j : cantidad de elementos (unidades) demandados por los nodos de demanda.

- Variables de decisión: en el problema de transporte, se define solo una variable de decisión, de la siguiente forma:

x_{ij} : variable continua que define la cantidad de elementos transportados desde un nodo de suministro i a un nodo de demanda j .

El modelo de optimización del problema general de transporte se representa a través del siguiente PPL:

- Función objetivo: minimiza el costo total de transporte desde los nodos de suministro a los nodos de destino:

$$\min_x \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

- Restricciones: la primera restricción establece que la cantidad total de elementos transportados desde un nodo de suministro hacia todos los nodos debe ser igual a la disponibilidad que tiene el nodo de suministro. La segunda restricción señala que la demanda de cada nodo de destino debe ser satisfecha en igualdad por los nodos de suministro.

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = s_i \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in J$$

- Restricción de no-negatividad: determina que la variable de decisión pertenece a los números reales-positivos, incluyendo al cero, es decir, no-negativo.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$$

6.2.2. Ejemplo del problema de transporte

Considere el siguiente ejemplo: se desean trasladar contenedores con repuestos desde los puertos 1, 2 y 3 (con capacidades de suministro s_1 , s_2 y s_3) a los distintos centros de mantenimiento 1, 2, 3 y 4 (con capacidades de demanda d_1 , d_2 ,

d_3 y d_4). El transporte entre los puertos y los centros de mantenimiento tiene un costo determinado, que puede ser proporcional a la distancia u otro factor que se determine. La tabla de costo de transporte, las cantidades de contenedores disponibles a ser distribuidos desde los puertos y las demandas de contenedores por cada centro de mantenimiento se presentan a continuación (Figura 178):

	d_1	d_2	d_3	d_4	Suministro
s_1	464	513	654	867	75
s_2	352	416	690	791	125
s_3	995	682	388	658	100
Demanda	80	65	70	85	

Figura 178.- Ejemplo de distribución de contenedores – problema general de transporte (elaboración propia).

El objetivo es determinar el plan de transporte de contenedores, al mínimo costo, de tal forma de satisfacer totalmente la demanda de los centros de mantenimiento. El modelo de programación lineal del problema general de transporte, para este ejemplo planteado, es el siguiente:

$$\min_x (464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 658x_{34})$$

$$\text{s.a } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 75$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 125$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 65$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 70$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 85$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

Las restricciones principales del PPL, asociado al problema de transporte, tienen una estructura similar a la estructura de un problema de asignación, solo que los coeficientes de disponibilidad de recursos y tareas a asignar (unitarios para el problema de asignación) se convierten en los parámetros de suministro y de demanda, s_i y d_j , respectivamente.

Desde una perspectiva más amplia, el problema de transporte es una generalización del problema de asignación, con la diferencia que, en este último, la disponibilidad de recursos para ser suministrados y la demanda existente es unitaria y la cantidad de elementos transportados también.

6.3. Método Simplex para los problemas de transporte

Los problemas de transporte pueden ser resueltos mediante la aplicación del método Simplex tradicional que ya se conoce. Al ser el problema de transporte un PPL de minimización, implica que el método Simplex comienza desde un punto inicial no factible, constituido por el origen del eje de coordenadas, aplicándose la fase I del método en cuestión hasta alcanzar el primer punto extremo de la región de soluciones factibles.

No obstante, la estructura del PPL de un problema de transporte puede ser explotada por un método iterativo especializado, denominado el método Simplex para transporte.

Por lo tanto, para obtener la solución óptima, se utilizará un procedimiento que considera, inicialmente, obtener una primera solución factible a través de un método aproximado (fase I). Luego, se ejecutarán las iteraciones Simplex de transporte (fase II) para obtener la solución óptima, a base de la primera solución factible determinada en la fase I.

6.3.1. Métodos aproximados (fase I)

En el método Simplex de transporte, antes de su aplicación, es fundamental obtener una primera solución factible, aunque no sea necesariamente la solución óptima. Lo anterior se consigue mediante la aplicación de métodos aproximados.

Los métodos aproximados que se estudiarán en este capítulo corresponden al método de la esquina noroeste y al método de los costos mínimos, los cuales corresponden a los más utilizados. Existen otras alternativas como el método de Vogel o Russel, invitándose al lector a su estudio y aplicación.

Igualmente, una condición previa necesaria para la aplicación de los métodos aproximados es disponer de un balance entre el suministro y la demanda, representado matemáticamente de la siguiente forma:

$$\sum_{i \in I} s_i = \sum_{j \in J} d_j$$

- Método de la esquina noroeste:

Este método se basa en realizar una asignación localizada, por celdas, desde el extremo superior izquierdo de la matriz hacia la esquina inferior derecha de esta. El procedimiento heurístico asociado a este método se basa en el criterio del orden de asignación de demanda y no en uno de costo-eficiencia. El método se describe a través de la siguiente secuencia:

- Asigne la mayor cantidad posible de producto, que sea consistente con la cantidad ofrecida y la demandada, en

la celda superior izquierda que se encuentre disponible de la matriz (celda NO).

- Actualice los valores de suministro y demanda en la fila y columna de la celda de la última asignación, respectivamente, restando en ambos la cantidad recién asignada.
- Elimine de futuras asignaciones las celdas de la fila o columna de la celda para la cual el valor de suministro o demanda, respectivamente, se anuló (igual a cero).
- Si quedan elementos por distribuir, vuelva al paso 1 y continúe; si no existe demanda por satisfacer, continúe.
- Para encontrar el valor de la función objetivo, se debe efectuar la sumatoria de los productos c_{ij} con x_{ij} de aquellos x_{ij} mayores a 0 (variables básicas).

A continuación, se desarrollará un ejercicio para aplicar el método de la esquina noroeste. La Figura 179 muestra los datos del PPL del problema de transporte a resolver:

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	x_{11} 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	s_2	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	s_3	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
		5	15	15	15	50 (DEMANDA)

50 (SUMINISTRO)

Figura 179.- Parámetros del PPL para el método de la esquina noroeste (elaboración propia).

La implementación del método de la esquina noroeste, hasta alcanzar la primera solución factible, es la siguiente:

- Asigne la mayor cantidad posible de producto, que sea consistente con la cantidad ofrecida y la demandada, en la celda superior izquierda que se encuentre disponible de la matriz (celda NO).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	5 ←				15
	s_2					25
	s_3					10
		10	2	20	11	
		12	7	9	20	
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	
		0				

Figura 180.- Primera iteración – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

En este caso (Figura 180), la primera fila s_1 tiene capacidad disponible, siendo asignado al destino d_1 que tiene demanda insatisfecha. Por lo tanto, se realiza una asignación inicial de 5 unidades, a un costo de 10 unidades de valor por unidad asignada.

- Actualice los valores de suministro y demanda en la fila y columna de la celda de la última asignación, respectivamente, restando en ambos la cantidad recién asignada.

Como se muestra en la Figura 180, a un costado de la primera fila y columna, se actualizaron los valores de la capacidad de suministro disponible y demanda, respectivamente, quedando una capacidad disponible de suministro de 10 unidades y la demanda del destino uno totalmente satisfecha.

- Elimine de futuras asignaciones las celdas de la fila o columna de la celda para la cual el valor de suministro o demanda, respectivamente, se anuló (igual a cero).

En este caso, se elimina la columna 1, debido a que la demanda fue totalmente satisfecha.

- Si quedan elementos por distribuir, vuelva al paso 1 y continúe; si no existe demanda por satisfacer, continúe.

En este ejemplo, aún existe demanda por satisfacer, por lo cual se debe continuar al paso 1.

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5	10	20	11	15	10 0
	s_2	12	7	9	20	25	
	s_3	4	14	16	18	10	
		5	15	15	15		
		0	5				

Figura 181.- Segunda iteración – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

Las figuras 181, 182, 183, 184 y 185 muestran las cinco iteraciones necesarias para alcanzar la primera solución factible, una vez aplicados los pasos 1, 2 y 3 iterativamente.

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5	10			15	10 0
	s_2		5			25	20
	s_3					10	
		5	15	15	15		
		0	5				
			0				

Figura 182.- Tercera iteración – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5	10			15	10 0
	s_2		5	15		25	20 5
	s_3					10	
		5	15	15	15		
		0	5	0			
			0				

Figura 183.- Cuarta iteración – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5	10			15	10 0
	s_2		5	15	5	25	20 5 0
	s_3						
		4	14	16	18	10	
		5	15	15	15		
		0	5	0	10		
			0				

Figura 184.- Quinta iteración – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5	10			15	10 0
	s_2		5	15	5	25	20 5 0
	s_3				10	10	0
		4	14	16	18		
		5	15	15	15		
		0	5	0	10		
			0		0		

Figura 185.- Sexta iteración – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

- Para encontrar el valor de la función objetivo, se debe efectuar la sumatoria de los productos c_{ij} con x_{ij} de aquellos x_{ij} mayores a 0 (variables básicas).

La tabla final de transporte es aquella representada en la Figura 186:

		DESTINOS			
		d_1	d_2	d_3	d_4
FUENTES	s_1	5 10	10 2	20	11
	s_2	12	5 7	15 9	5 20
	s_3	4	14	16	10 18

Figura 186.- Tabla final – método de la esquina noroeste (elaboración propia).

Considerando la asignación realizada, la solución básica factible es $x_{11} = 5$, $x_{12} = 10$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 15$, $x_{24} = 5$ y $x_{34} = 10$. El valor de la función objetivo está dado por la siguiente expresión:

$$\text{Costo} = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 18 = 520$$

- Método de los costos mínimos:

Este método se basa en realizar, prioritariamente, las mayores asignaciones posibles a las combinaciones de origen-destino de costos más bajos. A base de este método heurístico se obtendrá la primera asignación factible. El método se describe a través de la siguiente secuencia:

- Asigne la mayor cantidad posible del elemento demandado, consistente con la cantidad ofrecida, en la celda de la tabla que tenga el costo mínimo y que se encuentre disponible.
- Actualice los valores de suministro y demanda en la fila y columna de la celda de la última asignación,

respectivamente, restando en ambos la cantidad recién asignada.

- Elimine de futuras asignaciones las celdas de la fila o columna de la celda para la cual el valor de suministro o demanda, respectivamente, se anuló (igual a cero).
- Si quedan elementos por distribuir, vuelva al paso 1 y continúe; si no existe demanda por satisfacer, continúe.
- Para encontrar el valor de la función objetivo, se debe efectuar la sumatoria de los productos c_{ij} con x_{ij} de aquellos x_{ij} mayores a 0 (variables básicas).

A continuación, se desarrollará un ejercicio para aplicar el método de los costos mínimos. La Figura 187 muestra los datos del PPL del problema de transporte a resolver:

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	x_{11} 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	s_2	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	s_3	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
		5	15	15	15	50 (DEMANDA)

50 (SUMINISTRO)

Figura 187.- Parámetros del PPL para el método de los costos mínimos (elaboración propia).

La implementación del método de los costos mínimos, hasta alcanzar la primera solución factible, es la siguiente:

- Asigne la mayor cantidad posible del elemento demandado, consistente con la cantidad ofrecida, en la celda de la tabla que tenga el costo mínimo y que se encuentre disponible.

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	10	15	20	11	15
	s_2	12	7	9	20	25
	s_3	4	14	16	18	10
		5	15	15	15	0

Figura 188.- Primera iteración – método de los costos mínimos (elaboración propia).

En este caso (Figura 188), la celda con el menor costo corresponde a la asignación de la fuente s_1 al destino d_2 , con un costo mínimo de 2 unidades de valor.

Igualmente, es posible realizar la máxima asignación que corresponde a 15 unidades.

- Actualice los valores de suministro y demanda en la fila y columna de la celda de la última asignación, restando la cantidad recién asignada.

Como se muestra en la Figura 188, fuera de la primera fila y segunda columna, se actualizaron los valores de la capacidad de suministro disponible y demanda,

respectivamente, quedando ambos en un valor igual a cero.

- Elimine de futuras asignaciones las celdas de la fila o columna para la cual el valor de suministro o demanda, respectivamente, se anuló (igual a cero).

En este caso, se elimina la fila 1 ya que no tiene más unidades disponibles por distribuir y la columna 2, debido a que la demanda fue totalmente satisfecha.

- Si quedan elementos por distribuir, vuelva al paso 1 y continúe; si no existe demanda por satisfacer, continúe.

En este ejemplo, aún existe demanda por satisfacer, por lo cual se debe continuar al paso 1.

Las figuras 189, 190, 191 y 192 muestran las cuatro iteraciones necesarias para alcanzar la primera solución factible, una vez aplicados los pasos 1, 2 y 3 iterativamente.

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1		15			15	0
	s_2	10	2	20	11	25	
	s_3	5	4	14	16	18	10
		5	15	15	15		
		0	0				

Figura 189.- Segunda iteración – método de los costos mínimos (elaboración propia).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1		15			15	0
	s_2	10	2	20	11	25	10
	s_3	5					5
		4	14	16	18	10	
		5	15	15	15		
		0	0	0			

Figura 190.- Tercera iteración – método de los costos mínimos (elaboración propia).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1		15			15	0
	s_2	10	2	20	11	25	10
	s_3	5				5	5
		4	14	16	18	10	0
		5	15	15	15		
		0	0	0	10		

Figura 191.- Cuarta iteración – método de los costos mínimos (elaboración propia).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1		15			15	0
	s_2	10	2	20	11	25	10
	s_3	5				5	5
		4	14	16	18	10	0
		5	15	15	15		
		0	0	0	10		
					0		

Figura 192.- Quinta iteración – método de los costos mínimos (elaboración propia).

- Para encontrar el valor de la función objetivo, se debe efectuar la sumatoria de los productos c_{ij} con x_{ij} de aquellos x_{ij} mayores a 0 (variables básicas).

La tabla final de transporte es aquella representada en la Figura 193:

		DESTINOS			
		d_1	d_2	d_3	d_4
FUENTES	s_1		15		
		10	2	20	11
	s_2			15	10
		12	7	9	20
s_3	5				5
		4	14	16	18

Figura 193.- Tabla final – método de los costos mínimos (elaboración propia).

Considerando la asignación realizada, el punto óptimo es $x_{12} = 15$, $x_{23} = 15$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 5$ y $x_{34} = 5$. El valor óptimo está dado por la siguiente expresión:

$$\text{Costo} = 15 \cdot 2 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 = 475$$

- Observaciones a los métodos aproximados:

A partir de los resultados obtenidos con la aplicación de ambos métodos, es posible extraer algunas conclusiones iniciales asociadas a su aplicación.

En primer lugar, el criterio de inicio de la iteración condiciona el resultado a obtener como primera solución factible. Al utilizar el criterio de la esquina noroeste, se está

definiendo un criterio que es similar a cualquier otro de tipo aleatorio, ya que no sigue ningún análisis de costo-eficiencia, por lo que la calidad de la solución dependerá de la estructura de la matriz.

Contrariamente, el método de los costos mínimos utiliza un criterio basado en satisfacer prioritariamente la demanda que conlleve el menor costo de transporte posible.

En virtud de los resultados, la primera solución factible obtenida con el método de los costos mínimos permitió obtener un valor de la función objetivo menor que el método de la esquina noroeste, pudiéndose inferir que, a partir de la solución entregada por el método de los costos mínimos, se obtiene una solución básica factible más cercana a la solución óptima.

La importancia de lo anterior radica en que generalmente la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar la primera solución básica factible igualmente disminuye al utilizar el método de los costos mínimos. Solo algunas configuraciones especiales de la matriz y de los datos podrían derivar en una situación opuesta a la descrita.

6.3.2. Método Simplex de transporte (fase II)

Antes de la aplicación del método Simplex de transporte (equivalente a una fase II del método tradicional), es fundamental obtener una primera solución factible (fase I), la que no necesariamente corresponderá a la solución óptima.

Una vez obtenida la primera solución factible, se ejecutan los pasos del método Simplex de transporte a base de tres etapas:

cálculo de los multiplicadores duales, cálculo de los coeficientes de costos alternativos y mejora de la solución. Los pasos por desarrollar en cada etapa se describen a continuación:

- Cálculo de los multiplicadores duales:
 - Elegir la fila o columna con una mayor cantidad de variables básicas (paso 1).
 - Asignar a los multiplicadores duales el valor $u_i = 0$ si se elige una fila o $v_j = 0$ en el caso de elegir una columna (paso 2).
 - Calcular los multiplicadores duales para el resto de las filas y columnas, pivotando en las variables básicas, mediante (paso 3):

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

- Cálculo de los coeficientes de costos alternativos:

Una vez obtenidos los multiplicadores duales, se deben calcular los coeficientes de costo alternativos para las variables no básicas (paso 4).

Estos indican la tasa de variación de la FO por cada unidad de producto asignado a una variable.

Para lo anterior, se deben calcular coeficientes de costo alternativo para las variables no básicas utilizando la siguiente expresión:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

- Mejora de la solución:
 - Asignar el valor α a la variable no básica con el coeficiente de costo alternativo más negativo (paso 5).
 - Asignar el recorrido cerrado desde α hacia las variables básicas que se puedan comportar como “esquinas”, restando y sumando respectivamente cada esquina (paso 6).
 - Dentro de las celdas con signo (-), buscar aquella de menor valor y asignar dicho valor a α . Luego, restar y sumar, según corresponda, dicho valor a las esquinas que corresponda (paso 7).
 - Si la cantidad de variables básicas en la tabla es menor a la suma de filas y columnas menos uno ($m + n - 1$), el problema es degenerado y se deben incluir la cantidad de variables faltantes con valor cero. Se agrega aquellas con coeficiente de costo más bajo (paso 8).

		DESTINOS				SUMINISTRO
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	5	10			15
	s_2		5	15	5	25
	s_3				10	10
DEMANDA		5	15	15	15	

Figura 194.- Tabla inicial – método Simplex de transporte (elaboración propia).

A modo de profundizar la comprensión del método Simplex para los problemas de transporte, se desarrollará un problema a base del resultado obtenido en el método de la esquina noroeste (método aproximado de la fase I - Figura 194).

Iteración 1:

- Cálculo de los multiplicadores duales:
 - Elegir la fila o columna con una mayor cantidad de variables básicas (paso 1).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	5	10			15
	s_2	10	2	20	11	25
	s_3	12	7	9	20	10
		4	14	16	18	10
		5	15	15	15	

Figura 195.- Paso 1 – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

La segunda fila de la Figura 195 tiene la mayor cantidad de variables básicas, por lo cual, se selecciona (encerrada en óvalo morado).

- Asignar a los multiplicadores duales el valor $u_i = 0$ si se elige una fila o $v_j = 0$ en el caso de elegir una columna (paso 2).

Las filas (fuentes) adoptarán como multiplicador dual u_i y las columnas (destinos) el multiplicador v_j . En el caso de la segunda fila, el multiplicador dual $u_2 = 0$ (Figura 196).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	5	10			15
	s_2	10	2	20	11	25
	s_3	4	14	16	18	10
		5	15	15	15	

u_i (vertical label on the right)
 $u_2 = 0$ (vertical label on the right)
 v_j (horizontal label below the bottom row)

Figura 196.- Paso 2 – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

- Calcular los multiplicadores duales para el resto de las filas y columnas, pivoteando en las variables básicas, mediante (paso 3):

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

En consideración que en la tabla los valores en color rojo, ubicados en el extremo inferior derecho de cada celda, son los costos de transporte c_{ij} , es posible aplicar la expresión anterior a las celdas $\{(2,2), (2,3), (2,4)\}$, ya que $u_2 = 0$ (explotar la simetría).

$$\begin{array}{lll}
 c_{22} = u_2 + v_2 & c_{23} = u_2 + v_3 & c_{24} = u_2 + v_4 \\
 7 = 0 + v_2 & 9 = 0 + v_3 & 20 = 0 + v_4 \\
 v_2 = 7 & v_3 = 9 & v_4 = 20
 \end{array}$$

		DESTINOS				
		&	$	#	&	
FUENTES	' %	5	10			15
	' \$		5	15	5	25
	' #				10	10
" %		5	15	15	15	

= = =

Figura 197.- Paso 3a – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Una vez obtenidos los valores de los multiplicadores que se derivan del multiplicador inicial igual a cero (Figura 197), se continúa calculando el resto (Figura 198), utilizando la misma expresión (paso 3b).

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= u_1 + v_2 & c_{11} &= u_1 + v_1 & c_{34} &= u_3 + v_4 \\
 2 &= u_1 + 7 & 10 &= -5 + v_1 & 18 &= u_3 + 20 \\
 u_1 &= -5 & v_1 &= 15 & u_3 &= -2
 \end{aligned}$$

		DESTINOS				
		# \$	# #	# "	# !	
FUENTES	\$ \$	5	10			15
	\$ #		5	15	5	25
	\$ "				10	10
" "		5	15	15	15	

= = = =

Figura 198.- Paso 3b – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

- Cálculo de los coeficientes de costos alternativos:

Una vez obtenidos los multiplicadores duales, se deben calcular los coeficientes de costo alternativos para las variables no básicas (paso 4).

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - (-5) - 9 = \mathbf{16}$$

$$\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 11 - (-5) - 20 = \mathbf{-4}$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 12 - 0 - 15 = \mathbf{-3}$$

$$\bar{c}_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 4 - (-2) - 15 = \mathbf{-9}$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - (-2) - 7 = \mathbf{9}$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 16 - (-2) - 9 = \mathbf{9}$$

En virtud a que existen tres coeficientes de costo alternativos con valores negativos, no se cumple la condición de optimalidad, pues $\bar{c}_{ij} \leq 0, \forall(i,j)$, por lo que es necesario continuar con la siguiente etapa.

- Mejora de la solución:

La mejora de la solución busca materializar reasignaciones entre los distintos nodos de origen y destino, a fin de obtener una asignación de transporte de menor costo.

- Asignar el valor α a la variable no básica con el coeficiente de costo alternativo más negativo (paso 5).

A partir de la tabla resultante del paso 4, se identificó la celda con el menor valor de los coeficientes de costo alternativo, dentro de aquellos negativos, y se les asignó la variable α (Figura 199).

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5	10	16	-4	15	$u_1 = -5$
	s_2	-3	5	15	5	25	$u_2 = 0$
	s_3	α	-9	9	9	10	10
		4	14	16	18		
		5	15	15	15		
		$v_1 = 15$	$v_2 = 7$	$v_3 = 9$	$v_4 = 20$		

Figura 199.- Paso 5 – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Cabe señalar que una celda con un valor de coeficiente de costo alternativo no nulo $\bar{c}_{ij} \neq 0$ es una variable no básica.

Por lo tanto, la variable α redistribuirá las cantidades de “elementos” a transportar entre los nodos de origen y destino, basado en el criterio de crecimiento de la función objetivo, dado por el valor $\bar{c}_{ij} < 0$ seleccionado.

En este ejemplo, la variable α fue asignada a la celda (3, 1) con un valor $\bar{c}_{ij} = -9$.

- Asignar el recorrido cerrado desde α hacia las variables básicas que se sean “esquinas” del recorrido, restando y sumando respectivamente cada esquina (paso 6).

El esquema de recorrido cerrado busca realizar trasposos de asignaciones entre fuentes y destinos sin alterar el balance suministro-demanda (Figura 200).

A partir de la celda con la variable α , se inicia una secuencia cerrada de restas y sumas, debiéndose comenzar con una resta, ya que (para este caso) el destino D_1 tiene una demanda igual a 5 unidades, la cual ya no puede ser totalmente entregada por la fuente F_1 .

		DESTINOS					
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1	5 ⁽⁻⁾ 10	10 ⁽⁺⁾ 2	20	11	15	$u_1 = -5$
	s_2	12	5 ⁽⁻⁾ 7	15	5 ⁽⁺⁾ 20	25	$u_2 = 0$
	s_3	α 4	14	16	10 ⁽⁻⁾ 18	10	$u_3 = -2$
		5	15	15	15		
		$v_1 = 15$	$v_2 = 7$	$v_3 = 9$	$v_4 = 20$		

Figura 200.- Paso 6 – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Note que las reasignaciones formuladas a través del ciclo cerrado no pueden tener trazos diagonales, permitiéndose solo las transiciones verticales u horizontales.

- Dentro de las celdas con signo (-), buscar aquella de menor valor y asignar dicho valor a α . Luego, restar y sumar dicho valor a las esquinas y en el orden que corresponda.

El menor valor de cantidad de elementos transportados (número en color negro en la Figura 201) dentro de las celdas con signo negativo entre paréntesis es igual a 5, presente en las celdas $\{(1, 1), (2, 2)\}$, por lo cual, $\alpha = 5$.

		DESTINOS				
		1	2	3	4	
FUENTES	1	5 (-)	10 (+)			15
	2		5 (-)	15	5 (+)	25
	3				10 (-)	10
		5	15	15	15	

Figura 201.- Paso 7a – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Posteriormente, a cada valor de cantidad de elementos transportados (número en color negro, costo superior izquierdo) ubicados en cada celda esquina del circuito cerrado de reasignaciones (aquellas que tienen un signo “+” o “-” encerrada entre paréntesis), se les suma o resta α según sea el signo que tenga asignado (Figura 202).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	$5 - \alpha$ 10	$10 + \alpha$ 2	20	11	15
	s_2	12	$5 - \alpha$ 7	15	$5 + \alpha$ 20	25
	s_3	α 4	14	16	$10 - \alpha$ 18	10
		5	15	15	15	

Figura 202.- Paso 7b – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Por último, se procede a calcular el valor final de la asignación a transportar en cada celda, conforme al valor $\alpha = 5$ (Figura 203 y Figura 204).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	5 - 5 10	10 + 5 2	20	11	15
	s_2	12	5 - 5 7	15 9	5 + 5 20	25
	s_3	$\alpha = 5$ 4	14	16	10 - 5 18	10
		5	15	15	15	

Figura 203.- Paso 7c – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	0 10	15 2	20	11	15
	s_2	12	0 7	15 9	10 20	25
	s_3	5 4	14	16	5 18	10
		5	15	15	15	

Figura 204.- Paso 7d – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Con esta nueva asignación, la solución del problema de transporte entrega un costo total de transporte igual a 475. Para comprobar si esta solución es la óptima, es necesario repetir el proceso hasta el paso 5 y evaluar la condición de optimalidad.

- Si la cantidad de variables básicas en la tabla es menor a la suma de filas y columnas menos uno ($m + n - 1$), el problema es degenerado y se deben incluir la cantidad de variables faltantes con valor cero. Se agrega aquellas con coeficiente de costo más bajo (paso 8).

En este caso, inicialmente se observan 5 variables básicas (distintas a cero), por lo que:

$$(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6 < 5$$

Lo que implica que la solución propuesta es degenerada. Entonces, es necesario seleccionar una de las variables de transporte (número en color negro) que adoptó valor igual a cero. El criterio a seguir es que permanece en la base aquella variable que tiene el coeficiente de costo c_{ij} menor entre ambas, por lo cual, la variable que se mantiene es $x_{31} = 0$ y aquella que abandona la base es x_{11} .

		DESTINOS				
		1	2	3	4	
FUENTES	1	0	2			15
	2		0	9		25
	3	4				10
		5	15	15	15	

Figura 205.- Paso 8a – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

En la Figura 205 se muestra encerrada en rojo aquella variable que abandona la base y en un círculo de color verde aquella que se mantiene. Por lo tanto, la tabla final

de asignación de elementos a transportar en este problema se muestra en la Figura 206.

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		15			15
		10	2	20	11	
	s_2		0	15	10	25
		12	7	9	20	
s_3	5				5	10
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	

Figura 206.- Paso 8b – Iteración 1 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Tal como se señaló, el valor de la función objetivo es de 475 unidades de valor, reduciéndose en 45 unidades de valor con respecto a la solución aproximada obtenida a base del método de la esquina noroeste.

Considerando los datos de la Figura 206, se iniciará la segunda iteración para comprobar si se alcanzó la solución óptima o es necesario continuar mejorando la solución actual.

Iteración 2:

- Cálculo de los multiplicadores duales:
 - Elegir la fila o columna con una mayor cantidad de variables básicas (paso 1).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		15			15
		10	2	20	11	
	s_2		0	15	10	25
		12	7	9	20	
s_3	5				5	10
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	

Figura 207.- Paso 1 – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

La segunda fila tiene la mayor cantidad de variables básicas (Figura 207), por lo cual, se selecciona (encerrada en óvalo morado).

- Asignar a los multiplicadores duales el valor $u_i = 0$ si se elige una fila o $v_j = 0$ si se elige una columna (paso 2).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		15			15
		10	2	20	11	
	s_2		0	15	10	25
		12	7	9	20	
s_3	5				5	10
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	

u_i

En este caso, $u_2 = 0$

v_j

Figura 208.- Paso 2 – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Las filas (fuentes) adoptarán como multiplicador dual u_i y las columnas (destinos) el multiplicador v_j . En el caso

209), se continúa calculando el resto, utilizando la misma expresión (paso 3b - Figura 210).

$$\begin{array}{lll} c_{34} = u_3 + v_4 & c_{31} = u_3 + v_1 & c_{12} = u_1 + v_2 \\ 18 = u_3 + 20 & 4 = -2 + v_1 & 2 = u_1 + 7 \\ u_3 = -2 & v_1 = 6 & u_1 = -5 \end{array}$$

		DESTINOS					
		1	2	3	4		
FUENTES	1		15			15	$= -$
	2		0	15	10	25	$=$
	3	5				5	$= -$
		5	15	15	15		$=$

Figura 210.- Paso 3b – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

- Cálculo de los coeficientes de costos alternativos:

Una vez obtenidos los multiplicadores duales, se deben calcular los coeficientes de costo alternativos para las variables no básicas (paso 4).

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - (-5) - 6 = \mathbf{9}$$

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - (-5) - 9 = \mathbf{16}$$

$$\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 11 - (-5) - 20 = \mathbf{-4}$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 12 - 0 - 6 = \mathbf{6}$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - (-2) - 7 = \mathbf{9}$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 16 - (-2) - 9 = \mathbf{9}$$

En virtud a que existe un coeficiente de costo alternativo con valor negativo, no se cumple la condición de optimalidad, pues $\bar{c}_{ij} \leq 0, \forall(i,j)$, por lo que es necesario continuar con la siguiente etapa.

- Mejora de la solución:

La mejora de la solución busca materializar reasignaciones entre los distintos nodos de origen y destino, a fin de obtener una asignación de transporte de menor costo.

- Asignar el valor α a la variable no básica con el coeficiente de costo alternativo más negativo (paso 5).

		DESTINOS				\bar{c}_{ij}	u_i
		d_1	d_2	d_3	d_4		
FUENTES	s_1		15		α	15	$u_1 = -5$
		9 10	2	16 20	-4 11		
	s_2		0	15	10	25	$u_2 = 0$
		6 12	7	9	20		
s_3		5		5	10	$u_3 = -2$	
		4 9 14	9 16	18			
	v_j	5	15	15	15		$v_1 = 6 \quad v_2 = 7 \quad v_3 = 9 \quad v_4 = 20$

Figura 211.- Paso 5 – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

En este ejemplo (Figura 211), la variable α fue asignada a la celda (1,4) con un valor $\bar{c}_{ij} = -4$.

- Asignar el recorrido cerrado desde α hacia las variables básicas que se puedan comportar como “esquinas”, restando y sumando respectivamente cada esquina (paso 6 - Figura 212).

		DESTINOS						
		d_1	d_2	d_3	d_4			
FUENTES	s_1		15 (-)	2	20	11	15	$u_1 = -5$
	s_2		0	7	9	20	25	$u_2 = 0$
	s_3	5				5	10	$u_3 = -2$
		4	14	16	18			
		5	15	15	15			

v_j
 $v_1 = 6 \quad v_2 = 7 \quad v_3 = 9 \quad v_4 = 20$

Figura 212.- Paso 6 – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

- Dentro de las celdas con signo (-), buscar aquella de menor valor y asignar dicho valor a α . Luego, restar y sumar, según corresponda, dicho valor a las esquinas que corresponda.

		DESTINOS						
		1	2	3	4			
FUENTES	1		15 (-)	2		15	= -	
	2		0	7	9	20	25	=
	3	5				5	10	= -
		4						
		5	15	15	15			

j
= = = =

Figura 213.- Paso 7a – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

El menor valor de cantidad de elementos transportados (número en color negro en la Figura 213) dentro de las

celdas con signo negativo entre paréntesis es igual a 10, presente en la celda (2,4), por lo cual, $\alpha = 10$.

Posteriormente, a cada valor de cantidad de elementos transportados se les suma o resta α según sea el signo que tenga asignado (Figura 214).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		$15 - \alpha$		$\alpha = 10$	u_i 15 $u_1 = -5$
		10	2	20	11	
	s_2		$0 + \alpha$	15	$10 - \alpha$	25 $u_2 = 0$
		12	7	9	20	
s_3	5			5	10 $u_3 = -2$	
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	v_j $v_1 = 6$ $v_2 = 7$ $v_3 = 9$ $v_4 = 20$

Figura 214.- Paso 7b – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		5		10	15
		10	2	20	11	
	s_2		10	15		25
		12	7	9	20	
s_3	5			5	10	
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	

Figura 215.- Paso 7c – Iteración 2 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Por último, se procede a calcular el valor final de la asignación a transportar en cada celda, conforme al valor $\alpha = 10$ (Figura 215).

Con esta nueva asignación, la solución del problema de transporte entrega un costo total de transporte igual a 435. Para comprobar si esta solución es la óptima, es necesario repetir el proceso hasta el paso 5 y evaluar la condición de optimalidad.

- Si la cantidad de variables básicas en la tabla es menor a la suma de filas y columnas menos uno ($m + n - 1$), el problema es degenerado y se deben incluir la cantidad de variables faltantes con valor cero. Se agrega aquellas con coeficiente de costo más bajo (paso 8).

En este caso, inicialmente se observan 6 variables básicas (distintas a cero), por lo que:

$$(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6 = 6 \text{ variables básicas}$$

Lo que implica que la solución propuesta es correcta, pudiéndose continuar a la siguiente iteración.

Al igual que la primera iteración, se logró reducir el valor de la función objetivo desde 475 unidades de valor a 435 unidades de valor, habiendo una mejora de 40 unidades de valor.

Considerando los datos de la Figura 215, se iniciará la tercera iteración para comprobar si se alcanzó la solución óptima o es necesario nuevamente mejorar la solución actual.

Iteración 3:

- Cálculo de los multiplicadores duales:
 - Elegir la fila o columna con una mayor cantidad de variables básicas (paso 1).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1	10	5	20	11	15
	s_2	12	10	15	20	25
	s_3	5	4	14	16	18
		5	15	15	15	

Figura 216.- Paso 1 – Iteración 3 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

Las tres filas tienen la misma cantidad de variables básicas, por lo cual, se selecciona cualquiera. En este caso, se opta por la fila 1 (encerrada en óvalo morado - Figura 216).

- Asignar a los multiplicadores duales el valor $u_i = 0$ si se elige una fila o $v_j = 0$ en el caso de elegir una columna (paso 2).

Las filas (fuentes) adoptarán como multiplicador dual u_i y las columnas (destinos) el multiplicador v_j . En el caso de la segunda fila, el multiplicador dual $u_2 = 0$ (Figura 217).

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		5		10	15
	s_2		10	15		25
	s_3	5			5	10
	v_j	5	15	15	15	

u_i
En este caso,
 $u_1 = 0$

Figura 217.- Paso 2 – Iteración 3 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

- Calcular los multiplicadores duales para el resto de las filas y columnas, pivotando en las variables básicas, mediante (paso 3):

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

En consideración que en la tabla los valores en color rojo, ubicados en el extremo inferior derecho de cada celda, son los costos de transporte c_{ij} , es posible aplicar la expresión anterior a las celdas $\{(2,2), (2,3), (2,4)\}$, ya que $u_2 = 0$ (explotar la simetría).

$$\begin{array}{lll}
 c_{12} = u_1 + v_2 & c_{14} = u_1 + v_4 & c_{22} = u_2 + v_2 \\
 2 = 0 + v_2 & 11 = 0 + v_4 & 7 = u_2 + 2 \\
 v_2 = 2 & v_4 = 11 & u_2 = 5
 \end{array}$$

Una vez obtenidos los valores de los multiplicadores que se derivan del multiplicador inicial igual a cero (Figura 218), se continúa calculando el resto, utilizando la misma expresión (paso 3b - Figura 219).

		DESTINOS					
		1	2	3	4		
FUENTES	1		2			15	=
	2			15		25	=
	3	5				5	10
	<i>j</i>	5	15	15	15		=

Figura 218.- Paso 3a – Iteración 3 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

$$\begin{array}{lll}
 c_{23} = u_2 + v_3 & c_{34} = u_3 + v_4 & c_{31} = u_3 + v_1 \\
 9 = 5 + v_3 & 18 = u_3 + 11 & 4 = 7 + v_1 \\
 v_3 = 4 & u_3 = 7 & v_1 = -3
 \end{array}$$

		DESTINOS					
		1	2	3	4		
FUENTES	1		2			15	=
	2			15		25	=
	3	5				5	10
	<i>j</i>	5	15	15	15		= -

Figura 219.- Paso 3b – Iteración 3 del método Simplex de transporte (elaboración propia).

- Cálculo de los coeficientes de costos alternativos:

Una vez obtenidos los multiplicadores duales, se deben calcular los coeficientes de costo alternativos para las variables no básicas (paso 4).

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - 0 - (-3) = \mathbf{13}$$

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - 0 - 4 = \mathbf{16}$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 12 - 5 - (-3) = \mathbf{10}$$

$$\bar{c}_{24} = c_{21} - u_2 - v_4 = 20 - 5 - 11 = \mathbf{4}$$

$$\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - 7 - 2 = \mathbf{5}$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 16 - 7 - 4 = \mathbf{5}$$

En virtud a que no existe coeficientes de costo alternativos con valor negativo, se cumple la condición de optimalidad, pues $\bar{c}_{ij} \geq 0, \forall(i,j)$, por lo que no es necesario continuar con la siguiente etapa. La solución óptima está dada por la asignación de la Figura 220, con un valor óptimo de 435 unidades de valor:

		DESTINOS				
		d_1	d_2	d_3	d_4	
FUENTES	s_1		5		10	15
		10	2	20	11	
	s_2		10	15		25
		12	7	9	20	
s_3	5				5	10
		4	14	16	18	
		5	15	15	15	

Figura 220.- Resultado del problema de transporte (elaboración propia).

6.4. Problema de transbordo

El problema de transbordo combina el problema de transporte en dos fases, las que tienen como nodo común a los sitios de transbordo. La Figura 221 muestra el esquema de un problema de transbordo.

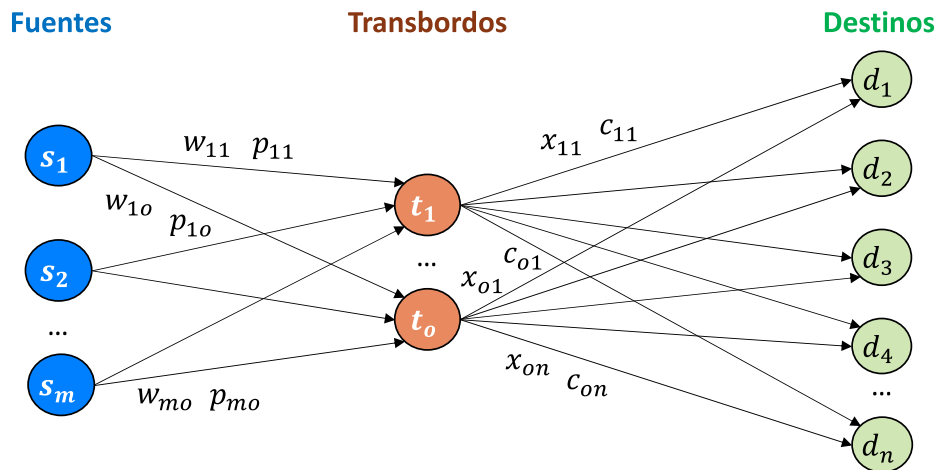


Figura 221.- Esquema de un problema de transbordo (elaboración propia).

Para este tipo de problema, las asignaciones para el transporte de elementos en la red dependen de la demanda de los nodos de destino, de la capacidad de suministro de los nodos de suministro o fuentes y también de la capacidad de acopio temporal de los nodos de transbordo.

Los nodos de transbordo son sitios de proceso y redireccionamiento de los elementos transportados y no necesariamente de almacenamiento, aunque podría reformularse el PPL para incluir dicha capacidad.

El subproblema de transporte de suministro, es decir, los nodos de suministro, origen o fuentes junto a los nodos de transbordo y las rutas o arcos que los unen se denomina escalón de suministro. Similarmente, el subproblema de transporte de

demanda compuesto por los nodos de transbordo, los nodos de demanda y las rutas o arcos que los unen se denomina escalón de demanda.

Finalmente, la versión más elemental de este tipo de problema considera que existe un balance entre el suministro y la demanda, por lo que todos los elementos disponibles se consumen en los nodos de demanda, la que es igualmente satisfecha en su totalidad.

6.4.1. Formulación del problema de transbordo

El problema de transbordo se compone de una función objetivo y tres restricciones principales, junto con tres conjuntos, dos parámetros de costo, dos parámetros de capacidad y dos variables de decisión que permiten su formulación.

- Conjuntos: se definen tres conjuntos, uno de los sitios con recursos disponibles (origen o fuente), uno de los nodos de transbordo y otro de los nodos de destino que demandan productos.
 - $I \in \{1, \dots, m\}$: conjunto de nodos de origen o fuentes que representan los sitios con elementos para el suministro, en el escalón de suministro.
 - $J \in \{1, \dots, n\}$: conjunto de nodos de destino que representan los sitios en los cuales existe una demanda, en el escalón de demanda.
 - $K \in \{1, \dots, o\}$: conjunto de nodos de transbordo que representan los sitios en que se acopian los elementos suministrados, previos a su distribución a los nodos de destino.

- Parámetros: los parámetros que se utilizan en el problema de transbordo se describen a continuación.
 - p_{ik} : costo (en unidades monetarias) de transportar una unidad de producto o recurso desde el nodo de suministro i hacia un nodo de transbordo k .
 - c_{kj} : costo (en unidades monetarias) de transportar una unidad de producto o recurso desde un nodo de transbordo k a un sitio de destino j que tiene una demanda determinada.
 - s_i : cantidad de elementos disponibles para ser suministrados desde un nodo de origen o fuente i .
 - d_j : cantidad de elementos demandados por un nodo de destino j .

- Variables de decisión: en el problema de transbordo se definen dos variables de decisión relacionadas con el transporte de elementos entre todos los nodos, en ambos escalones, como sigue:
 - w_{ik} : variable continua que define la cantidad de recursos o elementos transportados desde un nodo de suministro, origen o fuente i hacia un nodo de transbordo k .
 - x_{kj} : variable continua que define la cantidad de recursos o elementos transportados desde un nodo de transbordo k hacia un nodo de destino d .

El modelo de optimización del problema de transbordo se formula a través del siguiente PPL:

- Función objetivo: minimiza el costo total de transporte de los elementos entre los nodos.

$$\min_{w, x} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p_{ik} w_{ik} + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} x_{kj}$$

- Restricciones:
 - Restricción de suministro: determina que la cantidad de elementos que se deben transportar entre los nodos de suministro, origen o fuentes a todos los nodos de transbordo debe ser igual a la cantidad disponible a suministrar.

$$\sum_{k \in K} w_{ik} = s_i \quad \forall i \in I$$

- Restricción de transbordo: corresponde al enlace entre el escalón de suministro con el escalón de demanda, determinando que, por cada nodo de transbordo, la cantidad total de elementos que son acopiados en ellos son distribuidos a los nodos de demanda.

$$\sum_{i \in I} w_{ik} = \sum_{j \in J} x_{kj} \quad \forall k \in K$$

- Restricción de demanda: establece que la cantidad de elementos transportados desde los nodos de transbordo hacia un nodo destino satisface la totalidad de la demanda existente en dicho nodo.
- Restricción de no-negatividad: determina que la variable de decisión pertenece a los números reales-positivos, incluyendo al cero, es decir, no-negativo. Por lo tanto, los elementos transportados siguen solo el sentido desde los

nodos de origen, suministro o fuentes hacia los nodos de destino y no viceversa.

$$\begin{aligned} w_{ik} &\geq 0 & \forall i \in I, k \in K \\ x_{kj} &\geq 0 & \forall k \in K, j \in J \end{aligned}$$

Alternativamente, al modelo de transbordo presentado se le puede incorporar una nueva restricción que defina la cantidad máxima de elementos que los nodos de transbordo pueden acopiar, es decir, su capacidad. Para lo anterior, se agrega la constante $q_k \forall k \in K$ correspondiente a la capacidad de acopio de cada sitio de transbordo k . La restricción para agregar en el modelo es la siguiente:

$$\sum_{i \in I} w_{ik} \leq q_k \quad \forall k \in K$$

6.4.2. Ejemplo del problema de transbordo

Considere el siguiente ejemplo: se desea transportar munición desde tres depósitos generales (institucionales) hacia cinco unidades distribuidas en todo el país. Debido a que los depósitos no disponen de la totalidad de la munición que cada unidad requiere y debido a las distancias extensas, es necesario acopiar la carga en dos sitios intermedios, a fin de organizar su distribución final.

Se pide determinar el plan de transporte y acopio para satisfacer la demanda existente en cada unidad, al mínimo costo. El esquema del problema se presenta en la Figura 222, así como los datos de los escalones de suministro y demanda en las tablas de la Figura 223 y Figura 224.

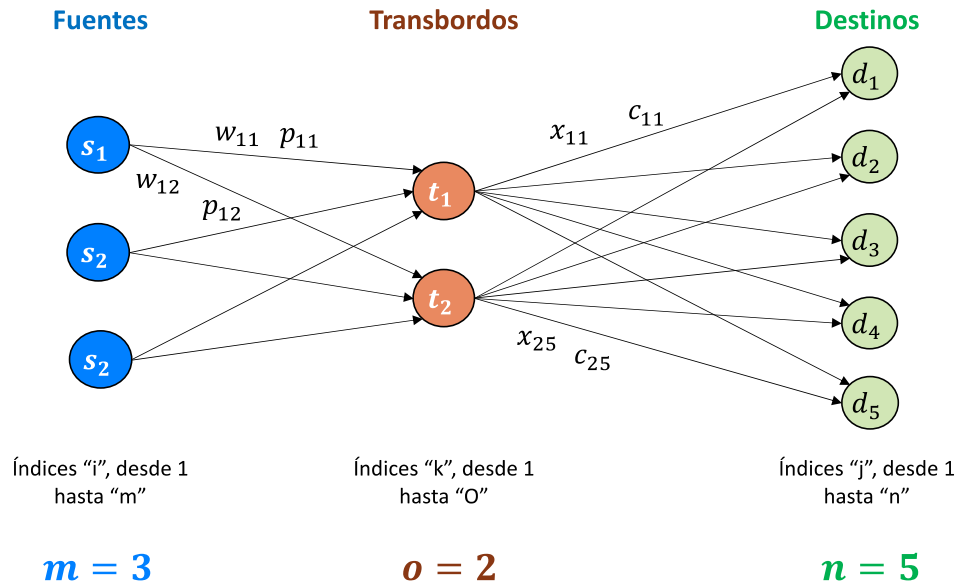


Figura 222.- Ejemplo del problema de transbordo (elaboración propia).

	t_1	t_2	Suministro
s_1	6	8	1000
s_2	7	10	800
s_3	12	9	1600

Figura 223.- Datos del escalón de suministro – ejemplo problema de transbordo (elaboración propia).

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
t_1	5	8	9	7	6
t_2	8	4	7	5	6
Demanda	700	600	1100	350	650

Figura 224.- Datos del escalón de demanda – ejemplo problema de transbordo (elaboración propia).

	t_1	t_2
q	1400	2000

Figura 225.- Datos de capacidad de acopio – ejemplo problema de transbordo (elaboración propia).

El modelo de programación lineal del problema de transbordo para este ejemplo es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \min_{w,x} \left[(6w_{11} + 8w_{12} + 7w_{21} + 10w_{22} + 12w_{31} + 9w_{32}) + \right. \\ & \left. (5x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 8x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25}) \right] \\ \text{s.a.} \quad & w_{11} + w_{12} = 1000 \\ & w_{21} + w_{22} = 800 \\ & w_{31} + w_{32} = 1600 \\ & w_{11} + w_{21} + w_{31} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \\ & w_{12} + w_{22} + w_{32} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 700 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 600 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1100 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 350 \\ & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 650 \\ & w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, w_{31}, w_{32} \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25} \geq 0 \end{aligned}$$

En el caso que se establezca que cada nodo de transbordo tiene una capacidad limitada, según lo indicado en la tabla de la Figura 225, se agregan las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} w_{11} + w_{21} + w_{31} &\leq 1400 \\ w_{12} + w_{22} + w_{32} &\leq 2000 \end{aligned}$$

En consideración a que la capacidad total de acopio de los nodos de transbordo es igual a la cantidad de elementos a ser suministrados y a la demanda, las restricciones anteriores serán satisfechas en igualdad, ya que, de no ser completada la capacidad total de acopio, no se podrá satisfacer la demanda de todos los sitios de destino y el problema matemático será no factible.

El problema de transbordo no es tan simple de ser resuelto con las herramientas disponibles hasta el momento, al menos de forma manual. No obstante, en el próximo capítulo se estudiará un método alternativo para su resolución a través del enfoque de redes.

7. PROBLEMAS DE REDES

Los problemas de redes son tipos especiales de problemas combinatorios que buscan, a partir de una red, definir flujos dentro de ella. Constituyen una herramienta importante para representar problemas de tipo combinatorio y así poder aplicar algunos algoritmos de resolución para ellos.

Diversos problemas y sus aplicaciones derivadas pueden ser representados a través de redes como, por ejemplo, el método de asignación, método de transporte, ruteo de vehículos, problemas de empaquetamiento, etc.

7.1. Elementos en los problemas de redes

Los modelos de redes tienen una estructura especial, por lo que se requiere estandarizar algunas estructuras y conceptos para su descripción de manera eficiente.

7.1.1. Definiciones de redes

- Flujo: es la transacción de una cantidad determinada de elemento, físico o no físico, entre dos entidades.
- Nodo: corresponde a la entidad que realiza alguna transacción de elementos. Se representa mediante un punto o círculo. Igualmente, se le puede denominar vértice.
- Arco: corresponde a los trazos que unen o conectan dos nodos, pudiendo ser direccionales (dirigido) o no direccionales (no dirigido). Gráficamente, se representa a través de una flecha, en la cual, la punta indica la dirección del flujo. Si un arco es bidireccional, se representa a través de una flecha con dos puntas o mediante un trazo sin

puntas, similar a un arco no dirigido. Sobre los arcos se desplaza el flujo entre nodos.

- Red: es un conjunto de nodos y arcos interconectados entre ellos. Según la naturaleza de los arcos, se pueden constituir redes dirigidas o no dirigidas. La red permite la circulación de flujo entre nodos. Si cada par de nodos se encuentran conectados, la red se denomina conexa.
- Ruta: es una sucesión de arcos que conectan dos nodos dentro de la red. También denominada trayectoria, una ruta puede ser dirigida o no dirigida, dependiendo del tipo de arcos que la componga. Si la cantidad de nodos de una ruta es n , la cantidad de arcos que la componen es $n - 1$.
- Ciclo: corresponde a una ruta en que el punto de inicio y de término está constituido por el mismo nodo. Los ciclos pueden ser dirigidos o no dirigidos, según el tipo de arco que lo compongan. En el caso de los ciclos, la cantidad de nodos es igual a la cantidad de arcos que la componen.
- Árbol: corresponde a la unión de arcos, formando una red, que no contenga ciclos. Al igual que una ruta, la cual es un caso especial de un árbol, la cantidad de arcos del árbol es $n - 1$ nodos que lo integran.

7.1.2. Representación gráfica de las redes

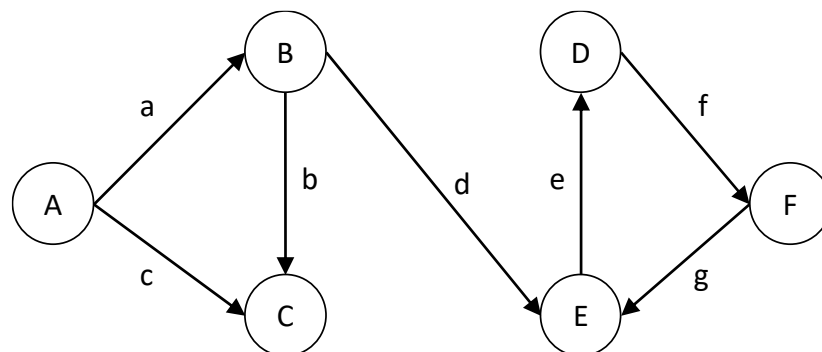


Figura 226.- Ejemplo de una red (elaboración propia).

Los conceptos definidos en la sección anterior tienen una representación gráfica que facilita la comprensión de los modelos de redes. La Figura 226 muestra una red cualquiera sobre la cual se ejemplificarán las definiciones anteriores.

En dicha red, los círculos con borde negro corresponden a los nodos, los que se representan mediante el conjunto $N = \{A, B, C, D, E, F\}$.

Los arcos se identifican por las flechas del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Nótese que, para efectos didácticos, $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$ y así sucesivamente hasta el último de ellos definido por $g = \overrightarrow{FE}$. En este ejemplo, todos los arcos son dirigidos.

Debido a que todos los pares de nodos se encuentran conectados, la red del ejemplo es de tipo conexa. En el caso que el arco $d = \overrightarrow{BE}$ se eliminara, la red sería no conexa, debido a que existen dos estructuras de red que no están conectadas.

Derivado de lo último, la secuencia de arcos $A_2 = \{e, f, g\}$ es un ciclo dirigido, debido a que el flujo que inicia en cualquiera de los tres nodos puede finalizar en sí mismo. Note que también se puede identificar la existencia de un ciclo debido a que aquel está compuesto por tres nodos y tres arcos, lo cual no ocurre cuando se tiene una ruta.

En la red presentada existen numerosas rutas. Por ejemplo, para conectar los nodos A y F se debe recorrer la ruta $R = \{a, d, e, f\}$, conectando los nodos $N = \{A, B, E, D, F\}$ por lo que, dado $n = 5 < r = 4$, efectivamente es una ruta y no un ciclo.

Finalmente, se identifican varios árboles en el ejemplo. Un árbol podría constituirse por $B = \{a, b, d\}$, conectando los nodos

$N_B = \{A, B, C, E\}$. Cuando el árbol conecta todos los nodos de la red, se denomina árbol de expansión o envergadura máxima. En este caso, el árbol $B = \{a, b, d, e, f\}$ cumple dicha condición.

7.2. Tipos de problemas de redes

En Investigación Operacional se estudian los problemas de redes debido a que corresponden a generalizaciones de muchos problemas de la vida real. Existen cuatro tipos de problemas de redes que son importantes estudiar y que tienen diversas aplicaciones útiles.

El primer problema a conocer se denomina camino o ruta más corta. Luego, se estudiará el problema del árbol mínimo de envergadura máxima (o expansión máxima). Los dos últimos problemas a estudiar corresponden al problema de flujo máximo y al problema de flujo máximo al mínimo costo.

7.2.1. Problema de las rutas mínimas

En el problema de las rutas mínimas (PRM), o también conocido como problema de la ruta más corta, el objetivo es desplazarse entre dos nodos de una red al mínimo costo. Para esto, cada arco de la ruta tiene asociado un costo de desplazamiento.

La formulación del PPL considera utilizar una unidad de flujo virtual que comienza en el nodo de origen, con un balance de flujo unitario negativo, circula por los nodos de la ruta con un balance de flujo nulo (cero) y finaliza en el nodo de destino con un balance de flujo unitario positivo.

La formulación del problema de la ruta más corta tiene la ventaja de que es posible explotar la propiedad de unimodularidad. A continuación, se formula el problema de la ruta más corta.

- Conjuntos: se define un conjunto correspondiente a los nodos de la red.

$N \in \{1, \dots, n\}$: conjunto de nodos que componen la red.

- Parámetros: el único parámetro de este modelo de red es el costo de cada arco, definido por:

c_{ij} : costo (en unidades monetarias u otra medida definida) de desplazarse entre el nodo i y el nodo j , en donde $i, j \in N$.

- Variables de decisión: en el problema de la ruta más corta se define una variable de decisión, como sigue:

x_{ij} : variable continua que define si el arco entre los nodos i y j es utilizado o no. Si bien, es una variable de naturaleza binaria, la propiedad de unimodularidad permite utilizar la relajación de dicha variable binaria a una continua.

El modelo de optimización del problema de la ruta más corta se formula a través del siguiente PPL:

- Función objetivo: minimiza el costo total de traslado entre los nodos de la ruta, considerando que $i \neq j$.

$$\min_x \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

- Restricciones: las restricciones de este problema son del tipo de balance de flujo, específicamente entre el flujo de entrada y salida de cada nodo. Para unificar la nomenclatura, dado un nodo i intermedio, el nodo de entrada a este se definirá por un nodo cualquiera k (nodo antecesor) y el nodo de destino o salida del flujo como j (nodo sucesor). Según el tipo de nodo, se pueden identificar las siguientes modalidades de restricciones de flujo:

- Restricción de origen: en el caso que el nodo i corresponda a aquel donde comienza el flujo, se utilizará la siguiente restricción:

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} - \sum_{j=1}^n x_{ij} = -1$$

Es decir, el balance global de unidades de flujo (virtual) que ingresan y salen del nodo en análisis unitario negativo.

- Restricción de ruta: son las restricciones aplicadas a los nodos intermedios de la ruta, no incluyendo al nodo de origen (o) ni al nodo de destino (d), por lo que $i \neq o, d$.

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0$$

- Restricción de destino: cuando i representa el nodo de destino ($i = d$), la siguiente restricción se incluye en el modelo:

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

Lo anterior significa que la unidad de flujo perdida por el nodo de inicio, y que no fue consumida en los nodos intermedios de la ruta, es recibido en el nodo de destino.

- Restricción de no-negatividad: determina que la variable de decisión pertenece a los números reales-positivos, incluyendo al cero, es decir, no-negativo. Producto de la propiedad de unimodularidad, la variable de decisión, que es de naturaleza binaria, puede representarse como variable continua.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in N: i \neq j$$

A partir de este modelo de optimización, se formulará este problema, con datos reales, a base del siguiente ejemplo.

Se requiere transportar personal desde un cuartel A hasta un cuartel F ubicados en la misma región. Existe una red vial extensa y con diferentes tiempos de traslado entre los cruces de caminos (nodos B, C, D y E) y los dos cuarteles. Se pide determinar cuál es la ruta más rápida (corta) entre el cuartel del nodo A y el cuartel del nodo F (Figura 227).

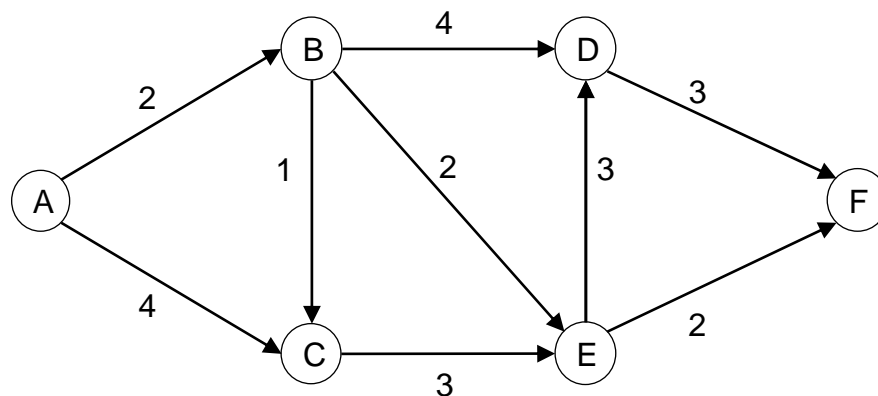


Figura 227.- Red para el problema de la ruta más corta (elaboración propia).

El modelo de optimización para el problema de redes presentado en el ejemplo anterior es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \min_x (2x_{AB} + 4x_{AC} + x_{BC} + 4x_{BD} + 2x_{BE} + 3x_{CE} + 3x_{ED} + 2x_{EF} + 3x_{DF}) \\
 \text{s.a.} \quad & -x_{AB} - x_{AC} = -1 \\
 & x_{AB} - x_{BC} - x_{BD} - x_{BE} = 0 \\
 & x_{AC} + x_{BC} - x_{CE} = 0 \\
 & x_{BD} + x_{ED} - x_{DF} = 0 \\
 & x_{BE} + x_{CE} - x_{ED} - x_{EF} = 0 \\
 & x_{EF} + x_{DF} = 1 \\
 & x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BD}, x_{BE}, x_{CE}, x_{ED}, x_{EF}, x_{DF} \geq 0
 \end{aligned}$$

La formulación del problema de la ruta más corta puede igualmente ser representado a través del siguiente ordenamiento:

$$\begin{aligned}
 & \min_x (2x_{AB} + 4x_{AC} + x_{BC} + 4x_{BD} + 2x_{BE} + 3x_{CE} + 3x_{ED} + 2x_{EF} + 3x_{DF}) \\
 \text{s.a.} \quad & \begin{array}{cccccccccc}
 -x_{AB} & -x_{AC} & & & & & & & & & = & -1 \\
 x_{AB} & & -x_{BC} & -x_{BD} & -x_{BE} & & & & & & = & 0 \\
 & x_{AC} & x_{BC} & & & & -x_{CE} & & & & = & 0 \\
 & & & x_{BD} & & & x_{ED} & & -x_{DF} & & = & 0 \\
 & & & & x_{BE} & x_{CE} & -x_{ED} & -x_{EF} & & & = & 0 \\
 & & & & & & & x_{EF} & x_{DF} & & = & 1
 \end{array}
 \end{aligned}$$

El problema de la ruta más corta puede igualmente ser representado en una matriz nodo-arco, conforme a lo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considere la columna correspondiente al arco $e = (i, j)$:

$$a_{ke} = \begin{cases} -1 & \text{si } k = i \\ 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq i \text{ y } k \neq j \end{cases}$$

Sea el vector de flujos $x \in \mathcal{R}^n$, donde x_{ij} es el flujo a través del arco (i,j) . Sea a_k la k -ésima fila de A . Entonces, el producto escalar $a_k^T x$ modela la ley de Kirchhoff.

Al observar el resultado de la operación anterior, se presentan tres casos posibles:

- $a_k^T x = b_k > 0$, para los nodos de demanda (destino).
- $a_k^T x = b_k < 0$, para los nodos de suministro (origen).
- $a_k^T x = b_k = 0$, para los nodos de transbordo (ruta).

El balance de flujo se representa por la ecuación de la forma $Ax = b$. Entonces, se puede concluir que:

- Si $b_k > 0$, k es un nodo de demanda (destino).
- Si $b_k < 0$, k es un nodo de suministro (origen).
- Si $b_k = 0$, k es un nodo de transbordo (ruta).

Por lo tanto, el flujo se conserva en los nodos, de la misma forma en que fue establecido en el modelo de optimización.

El problema de la ruta más corta puede ser resuelto mediante el método Simplex, aunque aquello puede resultar algo complejo, especialmente cuando las redes incrementan su dimensión.

Una alternativa para resolver el problema de la ruta más corta lo constituyen los métodos heurísticos. Dentro de los más utilizados se encuentran el método de Dijkstra. Este algoritmo funciona eficientemente en redes acíclicas con pesos positivos.

El **algoritmo de Dijkstra** se define de la siguiente forma: a un nodo i se le ha asignado una etiqueta $d(i)$ igual a la longitud del camino más corto $s \rightarrow i$ actualmente disponible. Estas etiquetas se actualizan siempre que se encuentra un camino más corto. El algoritmo de Dijkstra selecciona un nodo i , con una etiqueta temporal mínima, la hace permanente y se extiende desde ese nodo; es decir, escanea los arcos $A(i)$ (arcos adyacentes al nodo i) para actualizar las etiquetas de los nodos vecinos. El algoritmo se puede formalizar a través de la siguiente secuencia:

- Paso 1: inicializar
 - $S = \emptyset, \bar{S} = V$
 - $d(i) = \infty, \forall i \in V$
 - $d(s) = 0, pred(s) := 0$

- Paso 2: seleccionar el nodo $i \in \bar{S}$ tal que
 - $d(i) = \min\{d(j) : j \in \bar{S}\}$
 - $S := S \cup \{i\}$
 - $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{i\}$

- Paso 3: actualice las etiquetas de los nodos adyacentes

Para cada $(i, j) \in A(i)$ hacer

Si $d(j) > d(i) + c_{ij}$, entonces,

$d(j) = d(i) + c_{ij}$ y $pred(j) = i$.

En donde d corresponde a la distancia hacia un nodo cualquiera, $pred(i)$ es el nodo precedente o anterior al nodo i , V corresponde al conjunto de todos los vértices, S el subconjunto de todos los vértices seleccionados, \bar{S} es el subconjunto de todos los vértices no seleccionados. La complejidad computacional del algoritmo es $\mathcal{O}(|N|^2)$ donde $|N|$ corresponde a la cantidad total de nodos del grafo (red).

A base del algoritmo propuesto, se resolverá el problema de la ruta más corta, presentado al inicio de este capítulo, desde el nodo A al nodo F.

Inicializar $S = \emptyset$, $d(i) = \infty, \forall i \in V$, $\bar{S} = \{A, B, C, D, E, F\}$

- Iteración 0:
 - Seleccionar $i = A$, $S := \{A\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{A\}$
 - Actualice:
 - $d(B) = 2$, $pred(B) = A$,
 - $d(C) = 4$, $pred(C) = A$.

- Iteración 1:
 - Seleccionar $i = B$, $S := \{A, B\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{B\}$
 - Actualice:
 - $d(C) = d(B) + 2 = 3$, $pred(C) = B$ (mejora el anterior),
 - $d(D) = d(B) + 4 = 6$, $pred(D) = B$,
 - $d(E) = d(B) + 2 = 4$, $pred(E) = B$.

- Iteración 2:
 - Seleccionar $i = C$, $S := \{A, B, C\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{C\}$
 - Actualice:
 - $d(E) = 4$ y $pred(E) = B$ (se mantiene el anterior por $d(E) = d(C) + 3 = 6 > d(E) = d(B) + 2 = 4$)

- Iteración 3:
 - Seleccionar $i = E$, $S := \{A, B, C, E\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{E\}$
 - Actualice:
 - $d(D) = 6$ y $pred(D) = B$ (se mantiene el anterior por $d(D) = d(E) + 3 = 7 > d(D) = d(B) + 4 = 6$)
 - $d(F) = d(E) + 2 = 6$ y $pred(F) = E$.

- Iteración 4:
 - Seleccionar $i = D$, $S := \{A, B, C, D, E\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{D\}$

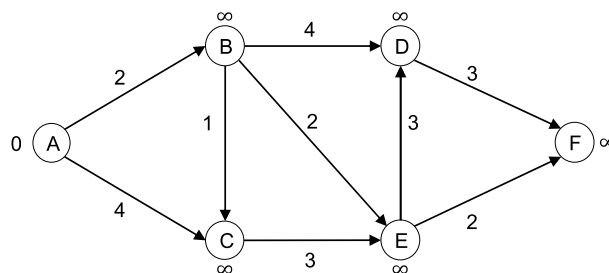
- Actualice:
 - $d(F) = d(E) + 2 = 6$ y $pred(F) = E$ (se mantiene el anterior por $d(F) = d(D) + 3 = 9 > d(F) = d(E) + 4 = 6$).
- Iteración 5:
 - Seleccionar $i = F$, $S := \{A, B, C, D, E, F\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{F\}$
 - Actualice:
 - $d(F) = d(E) + 4 = 6$, por lo que $pred(F) = E$ (se mantiene el anterior, ya que no tiene nodos adyacentes no visitados).
- Iteración 6:
 - $\bar{S} := \emptyset$; terminar.

Note que al inicio de la iteración 4, los nodos adyacentes no visitados del nodo E son los nodos D y F, los cuales tienen un valor $d(D) = d(F) = 6$, por lo que se seleccionó el nodo D debido a que tiene el menor valor ordinal.

Igualmente, al momento de asignar un valor $d(j)$ a un nodo que sea adyacente a un nodo seleccionado (en el conjunto S), dicho nodo adyacente queda en un estado de nodo abierto, dejando de tener una etiqueta de valor ∞ y queda habilitado para ser seleccionado al evaluar la condición $d(i) = \min\{d(j) : j \in \bar{S}\}$.

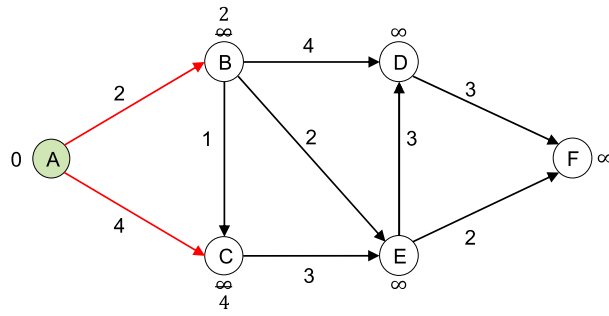
Para profundizar en el método de resolución del algoritmo, se aplicarán los mismos pasos descritos en forma gráfica.

Inicialización:



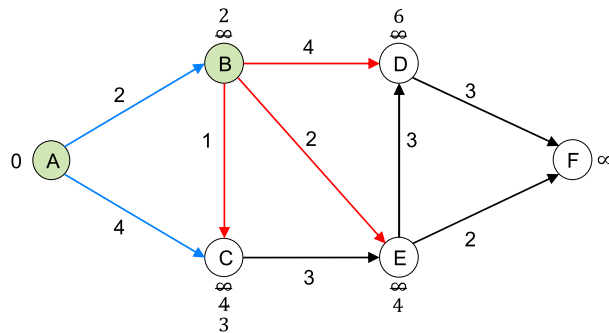
NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	
B	∞	-	
C	∞	-	
D	∞	-	
E	∞	-	
F	∞	-	

• Iteración 0:



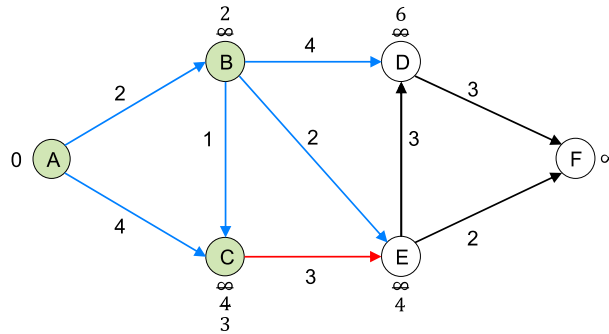
NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	✓
B	∞	A	
C	∞	A	
D	∞	-	
E	∞	-	
F	∞	-	

• Iteración 1:



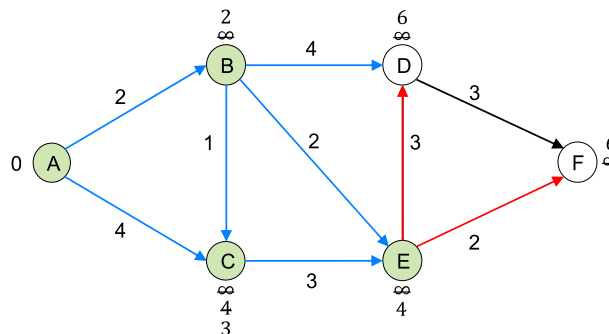
NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	✓
B	∞	A	✓
C	∞	A	✓
D	∞	B	
E	∞	B	
F	∞	-	

• Iteración 2:



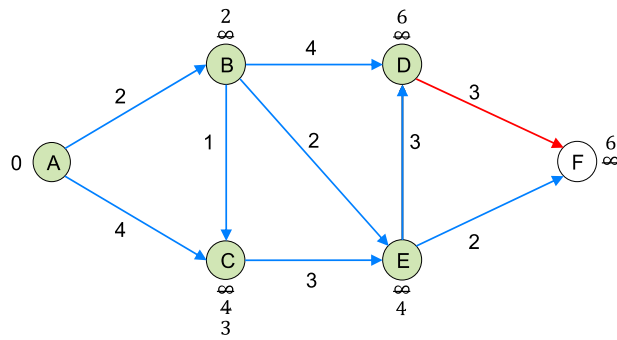
NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	✓
B	∞	A	✓
C	∞	A	✓
D	∞	B	
E	∞	B	
F	∞	-	

• Iteración 3:



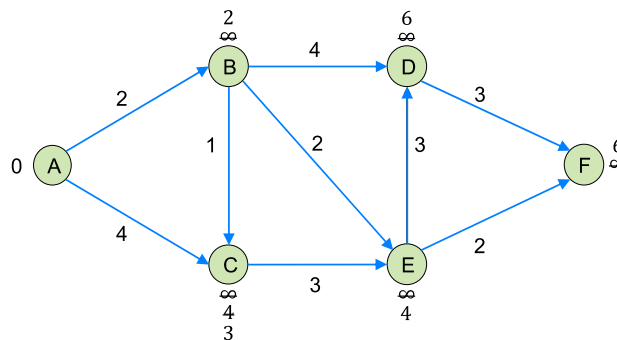
NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	✓
B	∞	A	✓
C	∞	A	✓
D	∞	B	
E	∞	B	✓
F	∞	E	

- Iteración 4:



NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	✓
B	∞ 2	A	✓
C	∞ 4 3	A B	✓
D	∞ 6	B	✓
E	∞ 4	B	✓
F	∞ 6	E	

- Iteración 5:



NODO	$d(i)$	$pred(i)$	VISITADO
A	0	-	✓
B	∞ 2	A	✓
C	∞ 4 3	A B	✓
D	∞ 6	B	✓
E	∞ 4	B	✓
F	∞ 6	E	✓

- Iteración 6:

$\bar{S} = \emptyset$; terminar.

En la red representada en las figuras anteriores, los arcos azules representan a aquellos ya recorridos y los de color rojo a los arcos en análisis. Igualmente, los nodos marcados en color verde son aquellos que ya fueron visitados. No obstante, un nodo puede estar en condición de no visitado, pero si abierto o habilitado para ser seleccionado, como sucede, por ejemplo, con los nodos D y E en la iteración 2.

7.2.2. Problema árbol mínimo de expansión máxima

Un árbol está constituido por todos los arcos que se generan producto de la unión de nodos sin que se genere un ciclo entre algunos de ellos. Si el árbol cubre la totalidad de los nodos de la

red, se obtiene un árbol de expansión máxima. Adicionalmente, en el caso que dicho árbol de expansión máxima esté configurado con los arcos que generen el menor costo posible en la red, aquella estructura se denomina árbol mínimo de expansión máxima (AMEM).

Un árbol mínimo de expansión máxima es un problema combinatorio de redes que considera la selección sucesiva de arcos hasta unir la totalidad de los nodos de la red, sin formar ciclos. A continuación, se define la formulación matemática del problema de AMEM.

- Conjuntos: se define un conjunto correspondiente a los nodos de la red.

$N \in \{1, \dots, n\}$: conjunto de nodos que componen la red.

- Parámetros: los únicos parámetros de este modelo de red son el costo de cada arco y la cantidad de nodos de la red, definidos por:

c_{ij} : costo (en unidades monetarias u otra medida definida) de seleccionar un arco entre el nodo i y el nodo j , en donde $i, j \in N$.

n : cantidad de nodos que componen la red.

- Variables de decisión: en el problema del AMEM se define una variable de decisión, como sigue:

x_{ij} : variable binaria que define si el arco entre los nodos i y j es seleccionado o no.

u_i : variable continua que define la posición u orden en que el nodo i es visitado.

El modelo de optimización del problema AMEM se formula a través del siguiente PPL:

- Función objetivo: minimiza el costo total de selección de los arcos entre los nodos de la red, considerando que $i \neq j$.

$$\min_x \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

- Restricciones:
 - Cada nodo de la red, distinto al origen, debe conectar a otro nodo en su dirección de salida exactamente una vez.

$$\sum_{j \in N: i \neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{1\}$$

- Para cada par de nodos (i, j) que definen un arco, el nodo que marca el extremo de destino de dicho arco es posterior al nodo predecesor (cancelación de ciclos).

$$u_j \geq u_i + 1 - n + n x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$$

- La suma total de arcos seleccionados en la red corresponde a la cantidad de nodos de la red menos uno.

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = n - 1$$

Esta restricción, en combinación con la segunda restricción, evitan la formación de ciclos en la red y que se estructure un árbol como el deseado.

- Restricción de definición de variables: corresponde a la definición de la variable binaria y continua en el modelo, como sigue:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A$$

$$u \in \mathbb{R}^n$$

Independiente de la formulación presentada, existen otras formulaciones con conceptos diferentes como aquellas basadas en flujos o en arcos.

Una formulación alternativa es aquella basada en flujos, la cual corresponde a una formulación de tipo entera, como se describe a continuación:

$$\min_{x,f} \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n f_{ij} = \sum_{k=2}^n f_{jk} + 1 \quad \forall j \in N \setminus \{1\}$$

$$\sum_{i=1}^n f_{1,i} = |N| - 1$$

$$(|N| - 1)x_{ij} \geq f_{ij} \quad \forall i, j \in N: i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N: i \neq j$$

$$f_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall i, j \in N: i \neq j$$

En el modelo presentado, se busca minimizar el costo de elección de arcos (i, j) , representando $x_{ij} \in \{0, 1\}$ si un arco es seleccionado o no (función objetivo). La primera restricción asegura que se vayan descargando unidades de flujo en la medida que se avanza por los nodos. La segunda restricción determina que la cantidad de unidades de flujo que recorrerán la red es igual a la cantidad de nodos menos una (cantidad de

arcos que debe tener el árbol). La tercera restricción define el límite superior de la variable de flujo, toda vez que solo habrá flujo si el arco se encuentra activo.

La variable f_{ij} representa el flujo que circula en el arco formado entre los nodos i,j . Entonces, en la medida que se avanza por la red, desde el nodo inicial definido como el número 1, se van consumiendo unidades de flujo en cada nodo, hasta llegar al último nodo, en el cual, se consume la última unidad de flujo. La limitante del modelo es que debe partir del primer nodo de la red y no de cualquiera. La Figura 228 muestra esquemáticamente el funcionamiento del modelo anteriormente descrito:

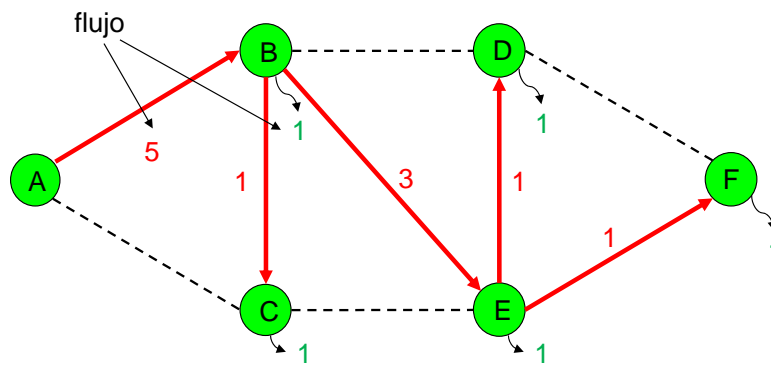


Figura 228.- Representación de la formulación de flujo para un AMEM (elaboración propia).

Para instancias de gran tamaño, la cantidad de restricciones y variables agregadas al modelo pueden afectar el proceso de resolución computacional. Debido a esto, es muy común el empleo de métodos heurísticos para su resolución. En este contexto, a continuación, se estudiarán dos métodos de ese tipo que entregan una solución óptima al problema del AMEM.

El primero de ellos corresponde al **algoritmo de Prim**. La mecánica de su funcionamiento es unir el nodo seleccionado

como inicial con el nodo más cercano y así formar un árbol con n pasos, correspondientes al número de nodos que tiene la red. La complejidad computacional del algoritmo es $\mathcal{O}(|N|^2)$ donde $|N|$ corresponde a la cantidad total de nodos del grafo (red). A continuación, se presenta la definición algorítmica de un AMEM y el pseudocódigo del algoritmo de Prim:

Se define un AMEM de la siguiente forma: dado un grafo (representación de la red) conexo $G = (N, A)$, con pesos de arco $c \in \mathbb{R}^{|A|}$, encuentre un subgrafo conexo de peso mínimo de G . Es decir, encuentre un árbol mínimo de expansión máxima para el grafo G .

Algoritmo de Prim

entrada: $G = (N, A)$: red

```

1:  $T \leftarrow \emptyset$  /* conjunto de arcos */
2:  $u \leftarrow$  vértice inicial (cualquiera)
3:  $U \leftarrow \{u\}$  /* conjunto de vértices */
4: mientras  $U \neq V$ 
5:    $(u, v) \leftarrow$  arco de menor costo, tal que  $u \in U$  y  $v \in V \setminus U$ 
6:    $T = T \cup \{(u, v)\}$ 
7:    $U = U \cup \{v\}$ 
8: fin

```

salida: T es un árbol mínimo de expansión máxima

Algoritmo 1.- Algoritmo de Prim (adaptación de Moreno & Ramírez, 2011).

El algoritmo de Prim funciona de la siguiente forma (Algoritmo 1): dado un conjunto de nodos de una red y un conjunto de arcos, inicialmente vacíos, se procede a seleccionar un nodo cualquiera de la red para iniciar el algoritmo.

Luego, se evalúan todos los arcos que se generan entre el nodo elegido y los nodos adyacentes y se selecciona aquel de menor costo, actualizándose los conjuntos de arcos y nodos seleccionados.

Posteriormente, se vuelve a realizar la evaluación de costo de los arcos formados por todos los nodos adyacentes a los nodos que componen el conjunto de nodos seleccionados, repitiéndose el proceso anterior hasta no disponer de más nodos disponibles para evaluar.

Para clarificar el funcionamiento del algoritmo de Prim, se utilizará el mismo esquema empleado en el problema de la ruta más corta, solo que en esta ocasión la red será no direccional (Figura 229).

En la misma región del ejemplo anterior, se requiere conectar todas las localidades existentes a los dos cuarteles (A y F) y asegurar dichas rutas en el menor tiempo posible.

Debido a la falta de vehículos y personal, no se pueden conectar tres o más ciudades entre sí, por lo que se requiere proponer el diseño del árbol al mínimo costo.

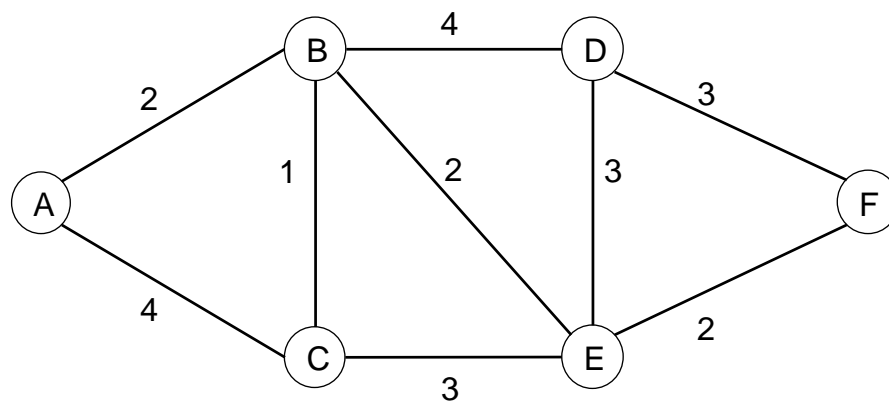
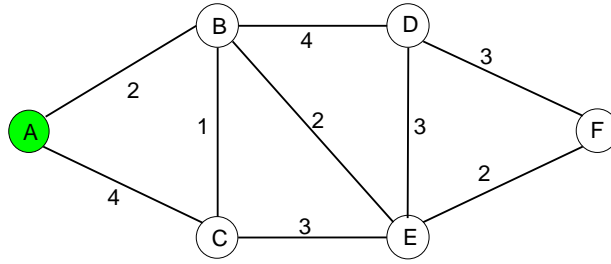


Figura 229.- Red para problema del árbol mínimo de expansión máxima (elaboración propia).

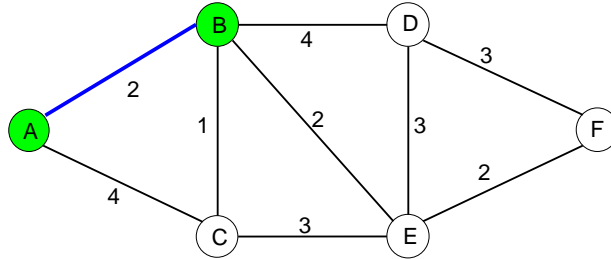
Conforme a lo señalado por el algoritmo, se inicializan los conjuntos $T = \emptyset$ y $U = \{A\}$, considerando al vértice A como inicial.

Iteración 1:



$T = \emptyset$ y $U = \{A\}$.

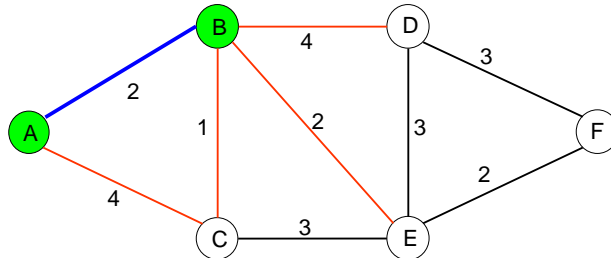
Comparar arcos que conectan el árbol ya formado (nodo A) con otros nodos. MST = 0



$T = \{(A, B)\}$
 $U = \{A, B\}$.

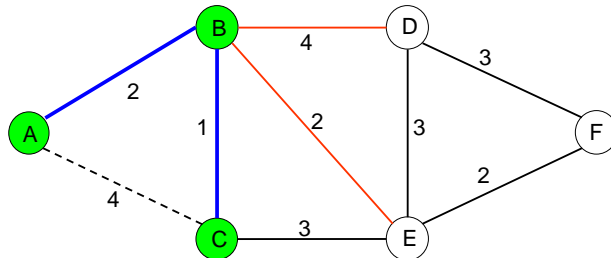
Agregar el menor (arco A-B). MST = 2

Iteración 2:



$T = \{(A, B)\}$
 $U = \{A, B\}$.

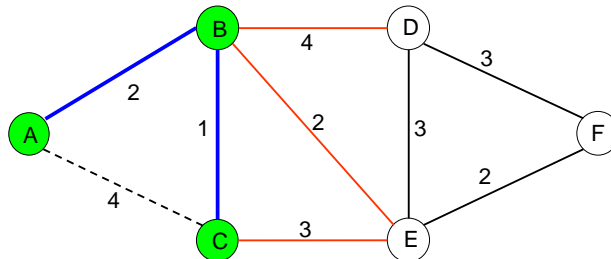
Comparar arcos que conectan el árbol ya formado con otros nodos (en color rojo).



$T = \{(A, B), (B, C)\}$
 $U = \{A, B, C\}$.

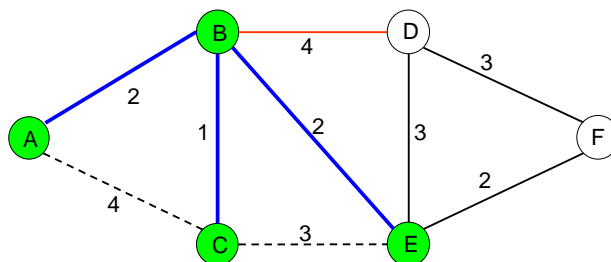
Agregar el menor. MST = 3. Borrar arcos que ya no se requerirán (A-C), pues forman ciclos.

Iteración 3:



$T = \{(A, B), (B, C)\}$
 $U = \{A, B, C\}$.

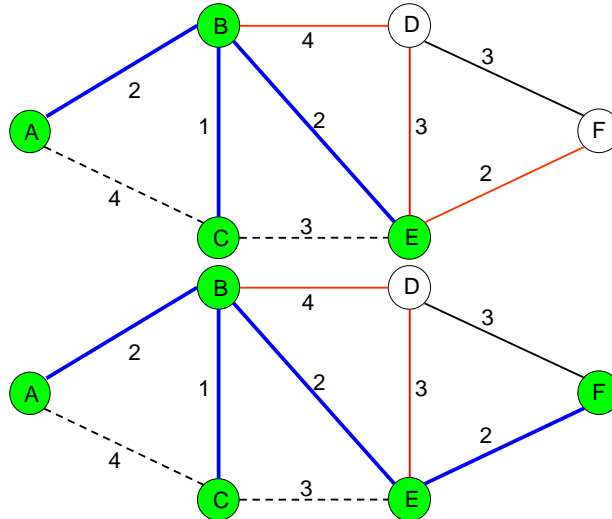
Comparar arcos que conectan el árbol ya formado (A-B-C) con otros nodos (D-E).



$T = \{(A, B), (B, C), (B, E)\}$
 $U = \{A, B, C, E\}$.

Agregar el menor (arco B-E). MST = 5. Borrar arcos que ya no se requerirán (C-E).

Iteración 4:



$$T = \{(A, B), (B, C), (B, E)\}$$

$$U = \{A, B, C, E\}.$$

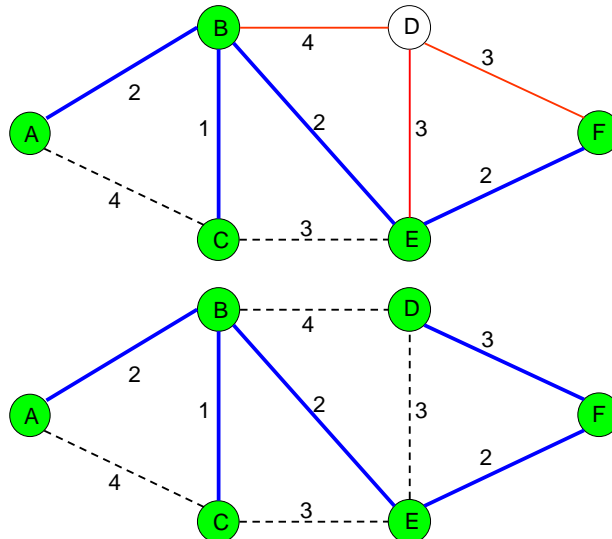
Comparar arcos que conectan el árbol ya formado con otros nodos.

$$T = \{(A, B), (B, C), (B, E), (E, F)\}$$

$$U = \{A, B, C, E, F\}.$$

Agregar el menor (arco E-F). MST = 7.

Iteración 5:



$$T = \{(A, B), (B, C), (B, E), (E, F)\}$$

$$U = \{A, B, C, E, F\}.$$

Comparar arcos que conectan el árbol ya formado con otros nodos.

$$T = \{(A, B), (B, C), (B, E), (E, F), (D, F)\}$$

$$U = \{A, B, C, D, E, F\}.$$

Agregar el menor. MST = 9. Borrar arcos que ya no se requerirán. FIN.

Tal como se señaló en la descripción del método, se requirieron $n = 6$ pasos para obtener la solución óptima, considerando que la elección del nodo inicial corresponde al primer paso.

El algoritmo de Prim, desarrollado en 1957, se caracteriza por seleccionar nodos para componer el árbol de costo mínimo. Sin embargo, existe un enfoque alternativo y que se basa en seleccionar arcos, en vez de nodos, denominado algoritmo de Kruskal.

En el **algoritmo de Kruskal** (desarrollado en 1956) se seleccionan arcos, en orden creciente de costo, independientemente de que dicho arco esté formado por un nodo de un arco seleccionado con un nodo adyacente a este o no, es decir, es una búsqueda global de arcos. Al mismo tiempo, se evitarán agregar los arcos que generen ciclos.

El algoritmo funciona de la siguiente manera (Algoritmo 2): dado los arcos de una red, se define un nodo de inicio. A base de dicho nodo, se busca el arco de menor costo y se actualiza el conjunto de nodos y arcos seleccionados. Luego, se busca cualquier otro arco de menor costo, aunque no quede en dicho momento conectado, hasta que no queden nodos disponibles. Este algoritmo funciona más eficientemente si los arcos de la red son ordenados en forma creciente de costo. La complejidad computacional del algoritmo es $\mathcal{O}(|A| \log |A|)$ donde $|A|$ corresponde a la cantidad total de arcos del grafo (red).

Algoritmo de Kruskal

entrada: $G = (N, A)$: red

- 1: $T \leftarrow \emptyset$ /* conjunto de arcos */
- 2: $u \leftarrow$ vértice inicial (cualquiera)
- 3: $U \leftarrow \{u\}$ /* conjunto de vértices */
- 4: **mientras** $U \neq V$
- 5: $(u, v) \leftarrow$ arco de menor costo, tal que $T \cup \{(u, v)\}$ no tiene ciclos.
- 6: $T = T \cup \{(u, v)\}$
- 7: $U = U \cup \{v\}$
- 8: **fin**

salida: T es un árbol mínimo de expansión máxima

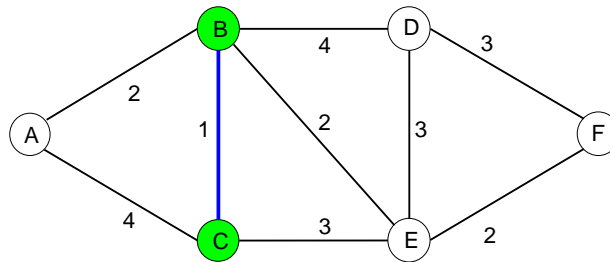
Algoritmo 2.- Algoritmo de Kruskal (adaptación de Moreno & Ramírez, 2011).

Para dar mayor claridad al lector, se aplicará el algoritmo de Kruskal en ejemplo de la Figura 229, resuelto inicialmente con el algoritmo de Prim: se inicializan los conjuntos $T = \emptyset$ y $N \setminus T = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (B, E), (C, E), (D, E), (D, F), (E, F)\}$.

Luego, se ordena $N \setminus T$ (que al inicio corresponde completamente al conjunto N) en orden creciente de costo, obteniéndose el siguiente conjunto de arcos disponibles: $N \setminus T = \{(B, C), (A, B), (B, E), (E, F), (C, E), (D, E), (D, F), (A, C), (B, D)\}$.

Finalmente, a base de lo descrito en el algoritmo, se selecciona el nodo de inicio $U = \{B\}$.

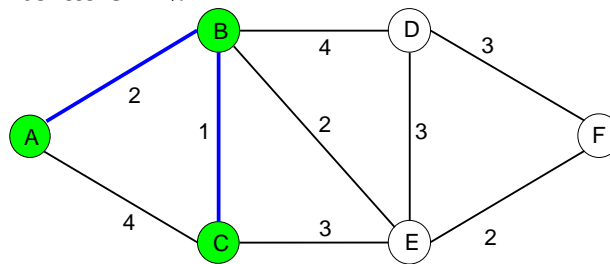
Iteración 1:



Seleccionar el arco de menor costo (B, C) ; $MTS = 1$.

Actualizar $T = (B, C)$ y $U = \{B, C\}$.

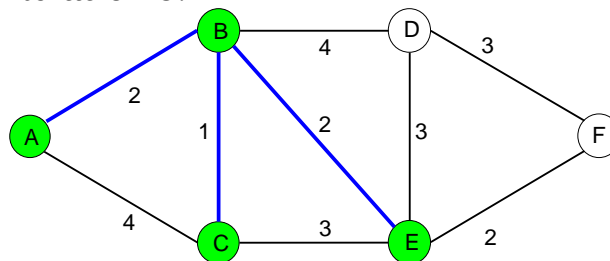
Iteración 2:



Seleccionar el arco de menor costo (A, B) ; $MTS = 3$.

Actualizar $T = \{(A, B), (B, C)\}$ y $U = \{A, B, C\}$.

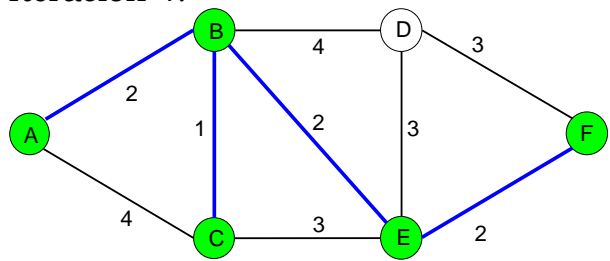
Iteración 3:



Seleccionar el arco de menor costo (B, E) ; $MTS = 5$.

Actualizar $T = \{(A, B), (B, C), (B, E)\}$ y $U = \{A, B, C, E\}$.

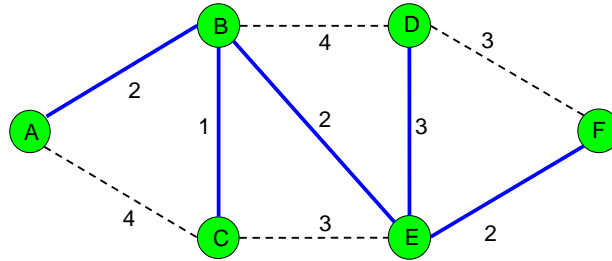
Iteración 4:



Seleccionar el arco de menor costo (E, F) ; $MTS = 7$.

Actualizar $T = \{(A, B), (B, C), (B, E), (E, F)\}$ y $U = \{A, B, C, E, F\}$.

Iteración 5:



Seleccionar el arco de menor costo (D, E); $MTS = 10$.

Actualizar
 $T = \{(A, B), (B, C), (B, E), (E, F), (D, E)\}$
 $U = \{A, B, C, D, E, F\}$.

En virtud de la aplicación del algoritmo y el resultado obtenido, es posible acotar la secuencia del algoritmo (Algoritmo 3) de la siguiente forma:

Entrada: Una red (grafo) no dirigido $G = (N, A)$ y costos c .

Salida: Un conjunto de arcos T de un AMEM para G .

Proceso:

1. Inicializar $T = \emptyset$
2. Ordenar los arcos en orden creciente, por ejemplo:

$$c_{a_1} \leq c_{a_2} \dots \leq c_{a_{|A|}}$$
3. Para $i = 1, 2, \dots, |A|$, ejecutar:
 Si $T \cup \{a_i\}$ no forma ciclo, ejecutar:
 $T: T \leftarrow T \cup \{a_i\}$

Algoritmo 3.- Algoritmo de Kruskal simplificado (elaboración propia).

Finalmente, si el grafo que representa a la red tiene activas la mayor parte de los arcos que puede componer, en función de sus nodos (cantidad de arcos proporcional al cuadrado de los nodos del grafo, $|A| = \mathcal{O}(|N|^2)$), es más eficiente utilizar el algoritmo de Prim. Contrariamente, si el número de arcos en el grafo es proporcional al número de nodos existentes ($|A| = \mathcal{O}(|N|)$), es más eficiente el algoritmo de Kruskal y se recomienda su empleo en dicha situación. Lo anterior igualmente se sustenta en la comparación de sus complejidades computacionales.

7.2.3. Problema de flujo máximo

El problema del flujo máximo consiste en encontrar el máximo de flujo factible a través de la red, desde el nodo de origen (s) a un nodo de destino (t).

Sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido que representa una red, el modelo de optimización que determina el flujo máximo es el siguiente:

$$\begin{aligned} f^{max} &= \max_{x,v} v \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i \in N} x_{ij} - \sum_{h \in N} x_{jh} &= \begin{cases} v & \text{si } j = \text{destino } (t) \\ -v & \text{si } j = \text{origen } (s) \\ 0 & \text{si } j \neq s, t \end{cases} \\ 0 \leq x_{ij} &\leq k_{ij} \quad \forall i, j \in N: i \neq j \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

En el modelo, x_{ij} corresponde al flujo enviado desde el nodo i al nodo j , definiéndose como variable continua. v representa la variable auxiliar de flujo total que circula desde el nodo s al nodo t y f^{max} corresponde al valor óptimo del flujo máximo. Finalmente, k_{ij} es el parámetro que determina la capacidad de cada arco (i, j) .

Esta formulación maximiza el flujo total que transita desde el nodo s al nodo t , sujeto a la restricción de flujo, similar a aquella utilizada en el problema de la ruta más corta, en la cual, el nodo de origen entrega unidades de flujo y el nodo de destino los recibe. Por último, cada arco tiene una capacidad k_{ij} que no puede ser excedida por el flujo que circula por este.

En general, las formulaciones de problemas de optimización de redes, bajo instancias de datos a gran escala, no son eficientes

de ser resueltas. Para lidiar con lo anterior, se han desarrollado algunos métodos heurísticos, uno de los cuales será estudiado a continuación. Entonces, para dar marco al estudio de los algoritmos para resolver un problema de flujo máximo, se presentarán algunas definiciones.

Sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido con nodos N y arcos dirigidos $A \subset \{(i, j): i \in N, j \in N, i \neq j\}$. El número de nodos es $m = |N|$ y el número de arcos es $n = |A|$. La representación gráfica de dicha red se denomina **red de flujo**, la que tiene las siguientes características:

- Se asocia a costo : $c_{ij} \geq 0$ del arco (i, j) .
- Se asocia a capacidad: $k_{ij} \geq 0$ del arco (i, j) .

Complementariamente, sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido. Una cadena C entre dos vértices i y j en N es un camino entre estos vértices en la versión no dirigida de G .

Entonces, sea $G = (N, A)$ la representación de una red con capacidad k_{ij} y flujo factible x_{ij} , un **camino aumentador** (*augmented path*, en inglés) es una cadena C entre el nodo de origen s y el nodo de destino t , tal que, para todo arco $a_l = (i_l, i_{l+1})$ en C , se satisface lo siguiente:

- Si a_l es un arco hacia adelante (avanza en sentido deseado del flujo), entonces $\Delta_l = k_{i_l i_{l+1}} - x_{i_l i_{l+1}} > 0$.
- Si a_l es un arco hacia atrás (avanza en sentido contrario del flujo deseado), entonces $\Delta_l = x_{i_l i_{l+1}} > 0$.

Consecuentemente, si C es un camino aumentador conformado por los arcos a_l , con $l = 1, \dots, m$, se puede definir que

$\Delta = \min_l \Delta_l > 0$. Dado lo anterior, cada arco a_l que satisface $\Delta_l = \Delta$ es denominado **cuello de botella** (*bottleneck* en inglés) de C .

Con todos los elementos definidos hasta este punto, se puede observar que si existe un camino aumentador con flujo factible x en una red G , es posible aumentar la cantidad de flujo que se envía entre el nodo de origen s y el nodo de destino t , actualizándose el flujo factible disponible en C . Entonces, se deduce que, de no existir caminos aumentadores con flujo factible, se habría encontrado el flujo máximo (f^{max}) entre el nodo de origen s y el nodo de destino t .

Por otro lado, asumida la existencia de un flujo x_{ij} que pasa a través de un arco (i, j) de capacidad k_{ij} , el valor $r_{ij} = k_{ij} - x_{ij}$ corresponde a la capacidad residual de ese arco.

Dado un arco (i, j) en que el flujo avanza hacia el nodo de destino, se le asocia un arco (j, i) en dirección opuesta. Si el flujo que recorre el arco (i, j) es x_{ij} , la capacidad residual del arco (i, j) corresponde a la capacidad del arco (j, i) con un valor x_{ij} . La capacidad residual del arco (j, i) permite que decrezca el flujo a través del arco (i, j) .

Entonces, la **red residual** es una red con capacidades residuales. En la Figura 230 se muestra un grafo con flujo y su red residual asociada.

A la izquierda de la imagen de la Figura 230 se muestra el grafo original o red de flujo, en el cual, las capacidades de cada arco están representados por números negros. Los arcos en color rojo representan un flujo cualquiera desde el nodo s al nodo t , con una cantidad de flujo igual a 1.

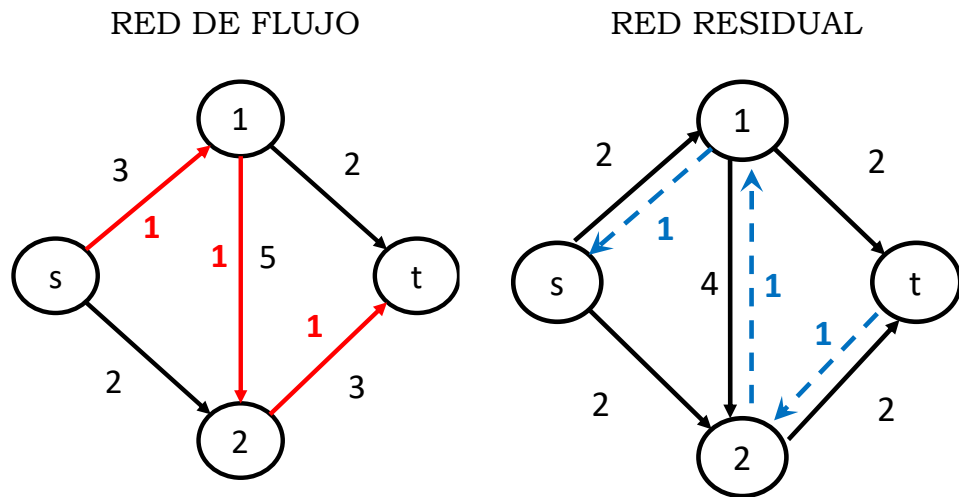


Figura 230.- Red de flujo y red residual para el problema de flujo máximo (elaboración propia).

A la derecha de dicha imagen se presenta el grafo o red residual de la red de flujo. Por una parte, en color azul y línea segmentada, se muestra el flujo ya consumido, en dirección opuesta al flujo original y en color negro se registran las capacidades residuales de flujo, en cada arco, luego de enviada la primera unidad de flujo al nodo t .

Por ejemplo, el arco $(s, 1)$ tiene una capacidad nominal de 3 unidades de flujo (lado izquierdo de la figura). Al enviar una unidad de flujo a través del arco $(s, 1)$, su capacidad se reduce en una unidad, quedando disponible solo 2 unidades de flujo de capacidad y activándose una unidad de flujo en sentido opuesto, como se muestra en la red residual de la Figura 230.

En síntesis, en la red de flujo se representa la cantidad de unidades de flujo x_{ij} que se desplazan por la red. En la red residual se presenta el flujo residual disponible r_{ij} y la cantidad de flujo extraído de la red (en azul). Al hacerse reversible un flujo, se puede utilizar en la dirección opuesta.

Un **corte de red** es una partición del conjunto de nodos N en dos subconjuntos S y \bar{S} ; lo anterior se denota como $[S, \bar{S}]$. Alternativamente, un corte es el conjunto de arcos cuyos nodos extremos pertenecen a distintos subconjuntos: $s \in S$ y $t \in \bar{S}$. Dichos cortes se denominan cortes $s - t$ (Figura 231).

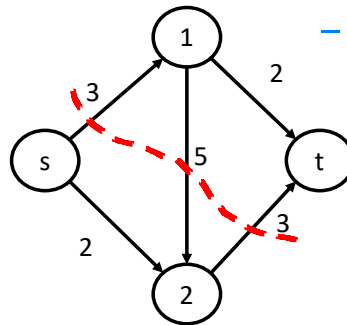


Figura 231.- Corte $s-t$ para el problema de flujo máximo (elaboración propia).

Si se define la capacidad de un corte $s - t$ de tipo $[S, \bar{S}]$ como $k[S, \bar{S}]$, la suma de las capacidades de los arcos que corta se representa por la expresión:

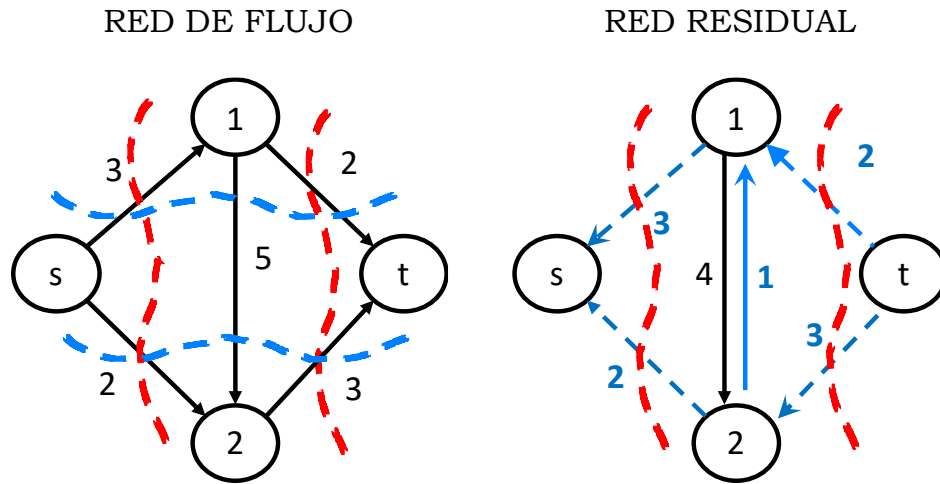
$$d[S, \bar{S}] = \sum_{(i,j) \in [S, \bar{S}]} k_{ij}$$

Entonces un **corte mínimo** corresponde a un corte $s - t$ cuya capacidad sea la mínima entre todos los cortes $s - t$.

Intuitivamente, la capacidad de un corte es un límite superior de la máxima capacidad de flujo que se puede enviar desde los nodos del subconjunto S a los nodos del subconjunto \bar{S} (ver Figura 232). La relación entre el flujo máximo a través de la red y el corte mínimo está establecida por el siguiente teorema:

El valor máximo del flujo entre un nodo de origen s y un nodo de destino t en una red con capacidades asociadas a los arcos

de ella es equivalente a la capacidad mínima entre todos los cortes $s - t$.



Los dos cortes azules y los dos rojos tienen el mismo costo. Sin embargo, los cortes rojos permiten la separación $s - t$. El corte mínimo coincide con el corte de los arcos saturados en la red residual.

Figura 232.- Cortes en red de flujo y residual para el problema de flujo máximo (elaboración propia).

Por lo tanto, en una red $G = (N, A)$, con capacidad k , la cantidad máxima de flujo f que se puede enviar desde un nodo de origen s y el nodo de destino t equivale a la capacidad mínima entre los cortes de G (corte mínimo $s - t$). A esta afirmación se le denomina el **teorema del flujo máximo-corte mínimo**.

El postulado anterior fue aquel que Lester Randolph Ford Jr. y Delbert Ray Fulkerson dedujeron y formalizaron para la solución del problema de flujo máximo, derivando en el **algoritmo Ford-Fulkerson**.

Formalmente, el algoritmo para construir una red residual (grafo) y el algoritmo Ford-Fulkerson se definen a través de los siguientes pseudo códigos (Algoritmo 4 y Algoritmo 5):

Grafo residual $G' = (N', A')$ **entrada:** $G = (N, A)$: red con capacidad k y flujo factible v .

- 1: $A' \leftarrow \emptyset$ /* conjunto de arcos de G' vacío */
- 2: **para** $a_{ij} = (i, j) \in A$ /* arcos del conjunto A */
- 3: **si** $x_{ij} < k_{ij}$ **entonces**
- 4: $A' \leftarrow A' \cup \{a_{ij}\}$
- 5: $k'_{ij} = k_{ij} - x_{ij}$ /* capacidad del arco a_{ij} en G' */
- 6: **fin**
- 7: **si** $x_{ij} > 0$ **entonces**
- 8: $A' \leftarrow A' \cup \{(j, i)\}$ /* agrega arco en sentido inverso */
- 9: $k'_{ij} = x_{ij}$
- 10: **fin**
- 11: **fin**

salida: $G' = (N, A')$ con capacidad k' y mismos nodos de G .

Algoritmo 4.- Algoritmo de grafo residual (adaptado de Moreno & Ramírez, 2011).

Algoritmo de Ford-Fulkerson**entrada:** $G = (N, A)$: red con capacidad k .

- 1: $x_{ij} \leftarrow 0, \forall (i, j) \in A$ /* inicializar el flujo */
- 2: $G' \leftarrow \text{Grafo_residual}(G, v)$
- 3: $f^{max} \leftarrow 0$ /* inicializar el valor óptimo del flujo máximo */
- 4: **mientras** $\exists C' = (a'_l)$ entre s y t en G'
- 5: $\Delta \leftarrow \min_l k'(a'_l)$ /* Δ es el máximo flujo por enviar entre s y t por el camino C' del grafo G' */
- 6: **para** $a'_l = (i_l, i_{l+1}) \in C'$
- 7: **si** $a'_l \in A$ **entonces**
- 8: $x_{a'_l} \leftarrow x_{a'_l} + \Delta$ /* a'_l es un arco hacia adelante en el camino aumentador C correspondiente a C' */
- 9: **sino**
- 10: $x_{i_{l+1}, i_l} \leftarrow x_{i_{l+1}, i_l} - \Delta$ /* a'_l es un arco hacia atrás en C' */
- 11: **fin**
- 12: **fin**
- 13: $G' \leftarrow \text{Grafo_residual}(G, v)$
- 14: $f^{max} \leftarrow f^{max} + \Delta$
- 15: **fin**

salida: x flujo óptimo y f'_s valor óptimo del flujo máximo.

Algoritmo 5.- Algoritmo de Ford-Fulkerson (adaptado de Moreno & Ramírez, 2011).

En el primer pseudo-código, se estructura la red residual para todos los flujos que cumplan con la condición de ser menores a la capacidad del arco respectivo y que sean positivos. Luego, el algoritmo de Ford-Fulkerson envía flujo entre los nodos s y t siempre y cuando existan caminos aumentadores en el grafo residual, actualizando a este último en cada iteración. La complejidad computacional del algoritmo de Ford-Fulkerson indica que requiere, a lo más, $\mathcal{O}(mnk_{max})$ operaciones, donde m corresponde a la cantidad total de arcos del grafo, n es la cantidad de nodos del grafo y k_{max} es la capacidad máxima de los arcos de la red ($k_{max} = \max_{(i,j) \in A} k_{ik}$).

La complejidad del algoritmo depende linealmente de la capacidad de los arcos, por lo que, un arco de gran capacidad hará que la complejidad aumente severamente, haciéndolo ineficiente. No obstante, existen otras implementaciones, con variaciones a este problema, que han logrado generar resultados más optimistas, no siendo objeto de estudio en este ensayo.

Entrada: Sea una red $G = (N, A)$ con capacidad k ; comenzar con un flujo igual a cero y la red residual similar a la red de flujo.

Salida: Cuando ningún camino aumentante sea encontrado, se obtiene el flujo máximo f^{max} .

Proceso:

1. Elegir un flujo distinto a cero desde s al nodo t .
2. Incrementar el flujo y actualizar la red residual.

Algoritmo 6.- Algoritmo de Ford-Fulkerson simplificado
(elaboración propia).

Aunque los pseudo-códigos presentados hacen pensar que el algoritmo es complejo de implementar, la realidad es que es más eficiente que la resolución del problema de flujo máximo

utilizando el método Simplex para redes. La secuencia del Algoritmo 6 sintetiza de forma descriptiva el algoritmo de Ford-Fulkerson.

A modo de ejemplificar la aplicación del algoritmo de Ford-Fulkerson para la resolución del problema de flujo máximo, se desarrollará el siguiente ejercicio:

Se requiere transportar la mayor cantidad de vehículos blindados posibles entre el cuartel de nodo A y el cuartel de nodo F durante un día determinado.

Debido a la capacidad de carga tolerable y tráfico esperado diario, cada ruta permite trasladar una cantidad de vehículos blindados limitada.

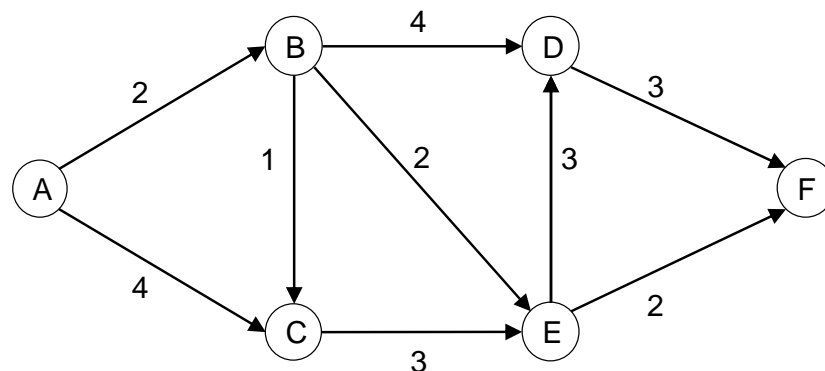


Figura 233.- Ejercicio 1 para el problema de flujo máximo (elaboración propia).

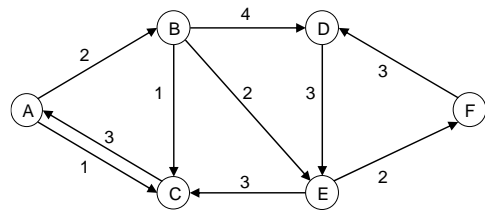
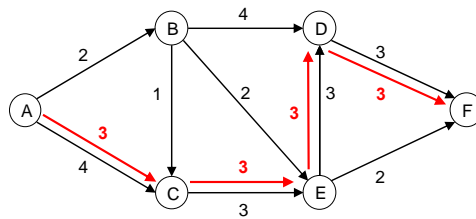
El propósito es encontrar la cantidad máxima de vehículos blindados (el flujo máximo de la red de la Figura 233) desde el cuartel del nodo A al cuartel del nodo F.

En la red de flujo, se representará el flujo hacia adelante con una flecha de color rojo en paralelo a la flecha de color negro que indica la capacidad del arco y el sentido del flujo.

RED DE FLUJO

RED RESIDUAL

Iteración 1:

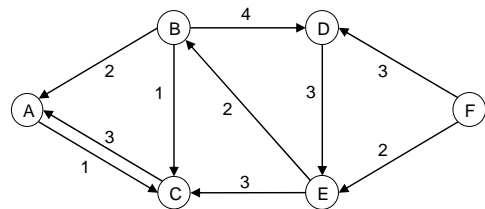
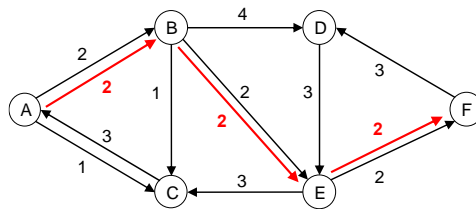


Camino aumentador: A-C-E-D-F

Flujo: 3

Flujo total: 3

Iteración 2:

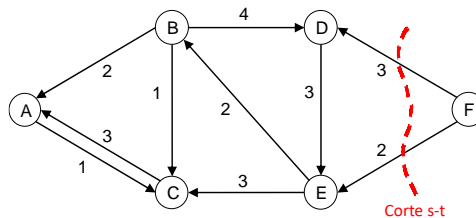


Camino aumentador: A-B-E-F

Flujo: 2

Flujo total: 5

Iteración 3:



Camino aumentador: No hay.

Flujo máximo: 5

(corte $s - t$ en el grafo residual)

Dado que no existen más caminos aumentadores disponibles, se evalúa la solución con el teorema flujo máximo-corte mínimo.

Cortando en los arcos saturados (D, F) y (E, F), se separa el nodo de origen y destino, no habiendo otro corte $s - t$ de menor valor.

En el problema anterior, luego de dos iteraciones se alcanzó la solución óptima. Igualmente, se comprobó su condición de optimalidad al realizar un corte $s - t$ en dos arcos saturados del grafo residual, no existiendo otro corte de menor capacidad.

En el siguiente ejemplo (Figura 234), se muestra un problema de flujo máximo, en el que se requiere utilizar un arco en sentido contrario de la red residual. Para lo anterior, se necesita encontrar el flujo máximo entre los nodos s y t .

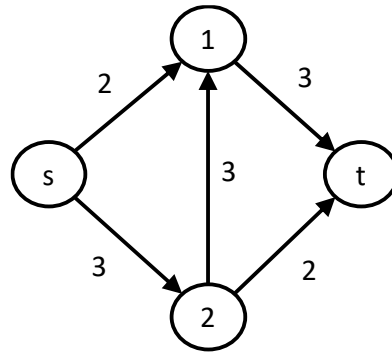
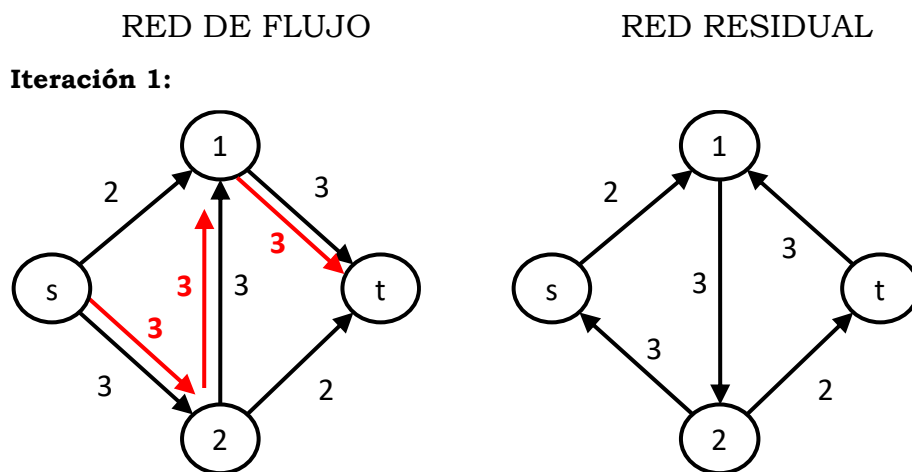


Figura 234.- Ejercicio 2 para el problema de flujo máximo (elaboración propia).

El problema del flujo máximo puede ser utilizado en diversos contextos. Por ejemplo, se desea desplegar una cantidad de personal militar desde una zona a otra. Los nodos corresponden a los cuarteles y los arcos a las carreteras o rutas aéreas disponibles, con una capacidad de transporte diaria. Se desea saber cuál es la capacidad máxima de efectivos que pueden ser transportados diariamente.



Camino aumentador: $s-2-1-t$.

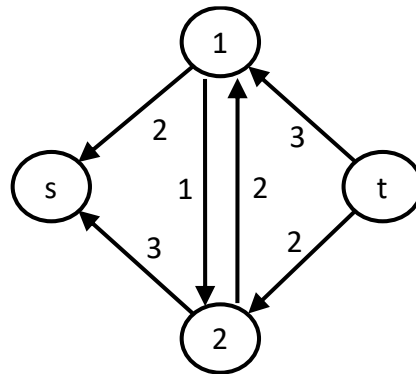
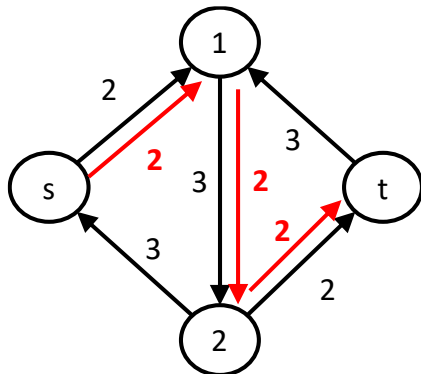
Flujo: 3

Flujo total: 3

RED DE FLUJO

RED RESIDUAL

Iteración 2:

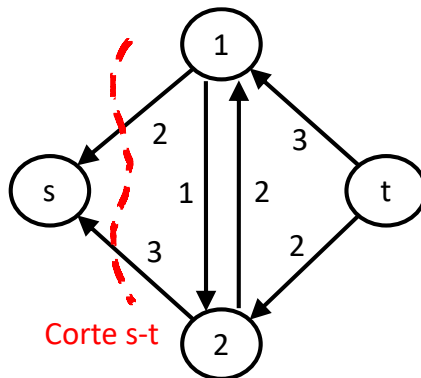


Camino aumentador: s-1-2-t.

Flujo: 2

Flujo total: 5

Iteración 3:



Camino aumentador: No hay.

Flujo máximo: 5

(corte $s - t$ en el grafo residual)

Dado que no existen más caminos aumentadores disponibles, se evalúa la solución con el teorema flujo máximo-corte mínimo.

Cortando en los arcos saturados (s, 1) y (s, 2), se separa el nodo de origen y destino, no habiendo otro corte $s - t$ de menor valor. Podría también cortarse en (1, t) y (2, t).

Igualmente, el mínimo corte puede ser utilizado en el contexto de la defensa. Por ejemplo, se busca impedir el transporte de elementos entre un lugar y otro en una zona determinada, dada una red vial densa. Entonces, ¿qué rutas (eventualmente puentes) deben ser intervenidos?

Finalmente, el criterio para seleccionar los caminos aumentadores en una red es a base del arco de salida con la mayor capacidad. Asimismo, si dos arcos que salen de un mismo

nodo tienen igual capacidad residual, se seleccionará aquel que tenga el menor subíndice. Si bien, este último criterio no sigue un criterio cuantitativo, permite mantener un ordenamiento al momento de ejecutar los algoritmos.

7.2.4. Problema de flujo máximo a costo mínimo

El problema de flujo de mínimo costo o flujo máximo a mínimo costo (PFMC) consiste en encontrar una solución al problema del flujo máximo (PFM), minimizando el costo total de traslado de las unidades de flujo entre el nodo de origen s y de destino t . Todo lo anterior, en consideración de que cada unidad de flujo enviada por un arco (i, j) tiene un costo c_{ij} .

En primera instancia, se presenta el modelo de optimización del PFMC a base de un modelo de redes. Considere una red de $n \in N$ nodos conectados, en que cada arco $a = (i, j) \in A$ tiene una capacidad k_{ij} y un costo de flujo unitario de c_{ij} .

Una vez obtenida la solución al PFM, cada arco tiene un flujo asignado de x_{ij} . Igualmente, existe un flujo total enviado desde el nodo de origen s al nodo de destino t representado por el parámetro b . El siguiente modelo de optimización representa al PFMC:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i \in N} x_{ij} - \sum_{h \in N} x_{jh} = b_j \begin{cases} > 0 & \text{si } j = \text{destino } (t) \\ < 0 & \text{si } j = \text{origen } (s) \\ 0 & \text{si } j \neq s, t \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij} \quad \forall i, j \in N: i \neq j \end{aligned}$$

La función objetivo minimiza el costo total de activación de las rutas. La restricción principal asegura que, en los nodos intermedios, el balance de flujo será nulo, es decir, lo que entra es igual a lo que sale. No obstante, en el nodo de origen, el flujo total es aquel máximo enviado (pérdida de flujo) y en el nodo de destino dicho flujo se recibe (ganancia de flujo).

Note que el valor del flujo requerido en el nodo de destino t dependerá del resultado del PFM. Independiente a lo anterior, dicho flujo $b = f^{max}$ será negativo para el nodo de origen s , positivo para el nodo de destino t y nulo para los nodos intermedios.

A la fecha, se han desarrollado numerosos métodos para resolver el PFMC de forma heurística, tales como el método de sucesivos caminos más cortos (rutas mínimas), algoritmos primal-dual, método Simplex especializado y método de punto interior especializado, entre otros. Sin embargo, en esta publicación se estudiará el **algoritmo de cancelación de ciclos**.

Para comenzar el estudio de este algoritmo es necesario comprender el significado de un ciclo negativo. Un ciclo de costo negativo es aquel en el que la suma máxima de flujo a ser transportada a través de la red genera un costo negativo en dicho ciclo de la red residual, considerando que la saturación de un arco se asocia a un costo negativo.

En la red residual, la capacidad de cada arco se denomina residuo r_{ij} , independiente de su dirección.

En la Figura 235 se muestra la estructura de un PFMC. Al costado izquierdo se observa una red de flujo, en donde cada arco es caracterizado por la cantidad de flujo máximo

determinado en el PFM x_{ij} , el costo unitario de flujo c_{ij} y la capacidad de cada arco k_{ij} .

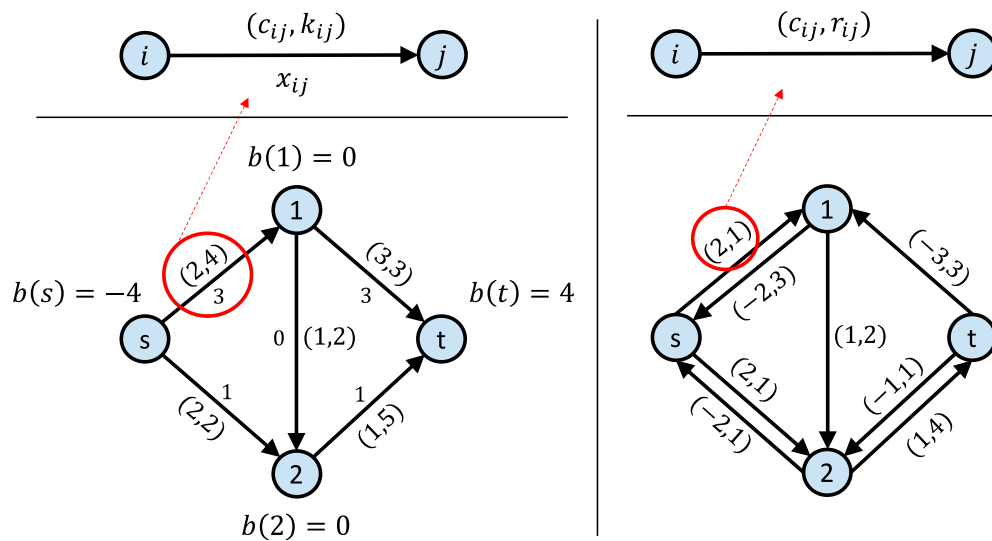


Figura 235.- Estructura del problema de flujo máximo a mínimo costo (elaboración propia).

Por otro lado, la red residual (costado derecho) caracteriza cada arco con el costo unitario de flujo c_{ij} y el flujo residual r_{ij} . El costo para un arco con flujo “hacia adelante” (en la dirección original del flujo) es positivo, mientras que el costo de un arco “hacia atrás” es negativo. Igualmente, el residuo corresponde a la fracción de la capacidad máxima del arco original de la red de flujo que es asignada al arco direccionado en el grafo o red residual.

Por ejemplo, la capacidad del arco $(s-1)$ es igual a 4 (red de flujo), la que, en la red residual, se descompone en 1 unidad para el arco $(s-1)$, con un costo de 2, y en 3 unidades de capacidad de flujo para el arco $(1-s)$, con un costo de flujo de -2.

El **algoritmo de cancelación de ciclos (de costos negativos)** tiene una complejidad computacional de $O(mnk_{max}c_{max})$, donde m corresponde a la cantidad total de arcos

del grafo, n es la cantidad de nodos del grafo, k_{max} es la capacidad máxima de los arcos de la red y c_{max} el costo máximo entre todos los arcos ($k_{max} = \max_{(i,j) \in A} k_{ik}$ y $c_{max} = \max_{(i,j) \in A} c_{ik}$).

El algoritmo opera de la siguiente manera: una solución factible de x es una solución óptima del problema de flujo máximo a mínimo costo si y solo si la solución satisface la condición de optimalidad de los ciclos negativos: la red residual G' no contiene ciclos de costo negativos.

Entrada: Solución al PFM de una red $G = (N, A)$ con capacidad k ; red residual G' de la solución PFM.

Salida: Cuando no hay más ciclos negativos en G' , se obtiene el flujo máximo a mínimo costo x_{PFMC}^* .

Proceso: mientras G' contenga un ciclo negativo, hacer:

1. use un algoritmo para encontrar un ciclo negativo C_N
2. $\delta := \min\{r_{ij}; (i, j) \in C_N\}$;
3. aumente en δ unidades de flujo en el ciclo C_N
4. actualizar G'

Algoritmo 7.- Algoritmo de cancelación de ciclos de costos negativos (elaboración propia).

El Algoritmo 7 se aplicará a un ejercicio de PFM ya resuelto, el que consiste en enviar la mayor cantidad de flujo, a mínimo costo, desde el nodo de origen s al nodo de destino t .

Para lo descrito anteriormente, se utilizará el ejemplo presentado en la Figura 235.

- Iteración 0: a partir de la solución del PFM, se elabora la red residual, en la cual la saturación de flujo de los arcos de la red de flujo se representa con arcos “hacia atrás” y costos negativos (Figura 236). El costo inicial del flujo es \$18.

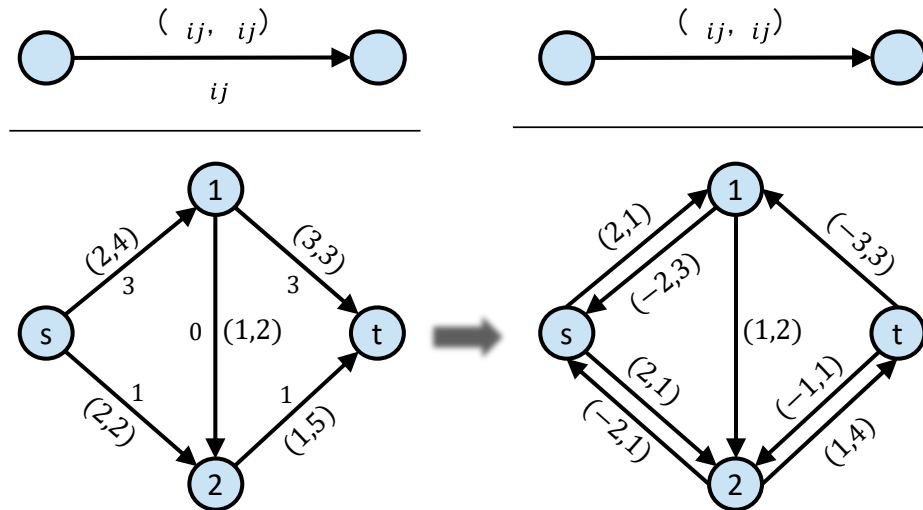


Figura 236.- Iteración 0 del PFMC (elaboración propia).

- Iteración 1: a partir de la red residual inicial, encontrar un ciclo negativo, sumando los costos de los arcos. Se determinó el ciclo negativo $(t-1-2)$ con un flujo $\delta = 2$ y con un costo negativo total de $-\$1$ (Figura 237). El costo del flujo es $\$16$.

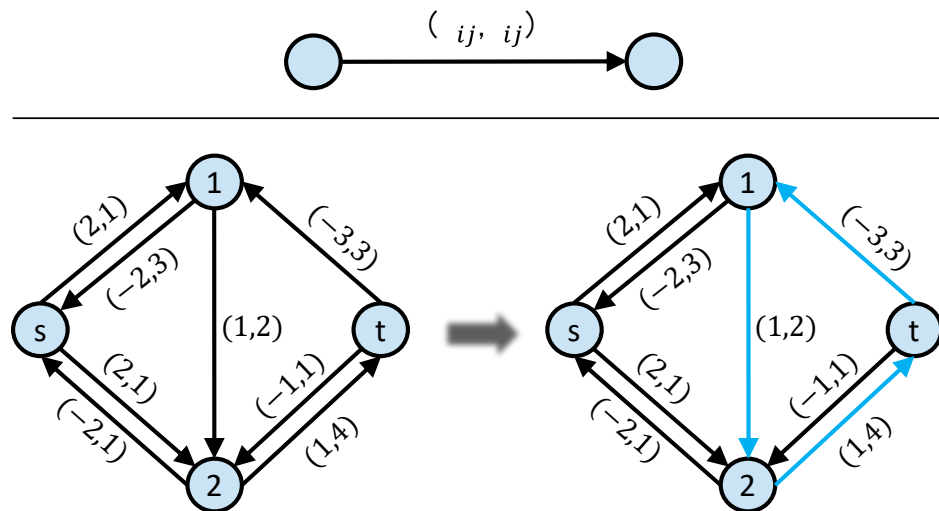


Figura 237.- Iteración 1 del PFMC (elaboración propia).

- Iteración 2: a partir de la red residual de la iteración 1, encontrar un ciclo negativo, sumando los costos de los arcos. Se determinó el ciclo negativo $(t-1-s-2)$ con un flujo $\delta = 1$ y

con un costo negativo total de -\$2 (Figura 238). El costo del flujo es \$14.

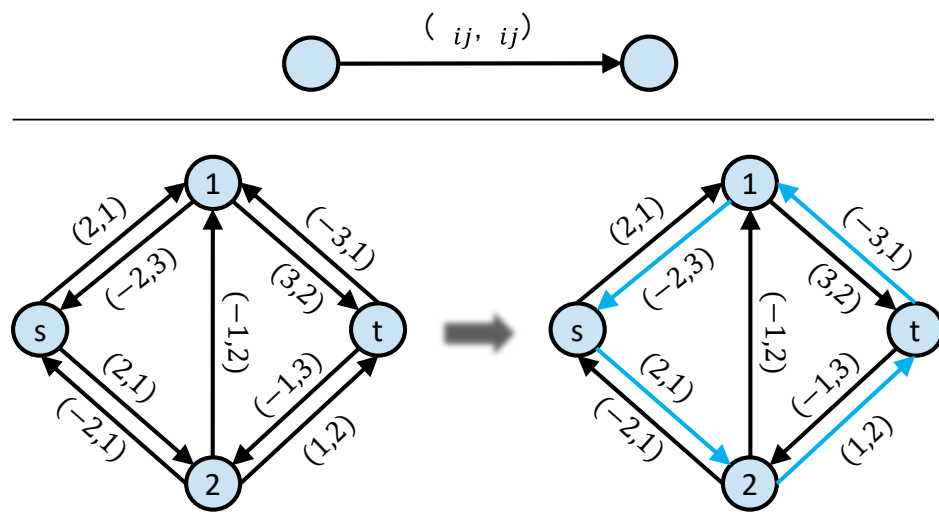


Figura 238.- Iteración 2 del PFCM (elaboración propia).

- Iteración 3: a partir de la red residual de la iteración 2, encontrar un ciclo negativo, sumando los costos de los arcos. No hay ciclos negativos, fin (Figura 239).

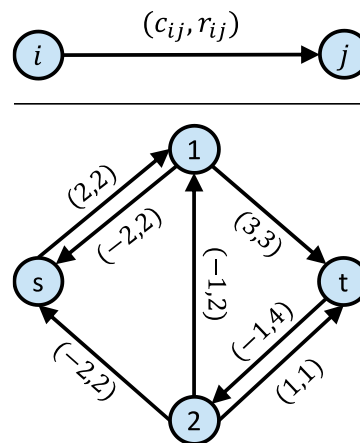


Figura 239.- Resultado del ejercicio de PFCM (elaboración propia).

La solución al PFCM es: $x(1,2) = 2 \rightarrow c(1,2) = 2$, $x(1,3) = 2 \rightarrow c(2,4) = 2$, $x(3,4) = 4 \rightarrow c(3,4) = 1$, $x(2,3) = 2 \rightarrow c(2,3) = 1$ con un costo mínimo total de \$14.

CONCLUSIONES

A lo largo del presente ensayo se profundizó sobre los aspectos fundamentales de la Investigación Operacional, sustentada en la teoría y métodos de programación lineal, de una forma didáctica, detallada y ordenada, de tal manera que pueda constituir una guía inicial para cualquier alumno que se inicie en esta disciplina o desee recordar algunos aspectos elementales de ella.

Igualmente, en cada uno de los métodos estudiados se presentaron algunas aplicaciones, a fin de guiar al lector en su empleo futuro en los contextos particulares que requieran del uso de la Investigación Operacional.

Finalmente, los contenidos presentados en este ensayo constituyen las bases teóricas y prácticas para profundizar, en un futuro próximo, en aplicaciones de mayor complejidad, en el contexto que se requiera tomar las mejores decisiones sujetas a las restricciones del entorno, desde una perspectiva cuantitativa.

REFERENCIAS

- Beck, A. (2014). *Introduction to Nonlinear Optimization: theory, algorithms, and applications with MATLAB*. Philadelphia, United States of America: The Society for Industrial and Applied Mathematics and Mathematical Optimization Society.
- Flores, F. (2011). *Optimización Lineal: una mirada introductoria*. Santiago, Chile: J. C. Sáez Editor.
- Garrido, R. (2001). *Modelación de Sistemas de Distribución de Carga*. Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Ciudad de México, México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- Hu, T. & Kahng, A. (2016). *Linear and Integer Programming Made Easy*. Springer Cham.
- Lewin, R. (2011). *La Teoría de Conjuntos y Los Fundamentos de la Matemática*. Santiago, Chile: J. C. Sáez Editor.
- Moreno, E. & Ramírez, H. (2011). *Grafos: fundamentos y algoritmos*. Santiago, Chile: J. C. Sáez Editor.
- Singer, M. (2013). *Una Práctica. Teoría de la Optimización Lineal: datos, modelos y decisiones*. Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Taha, H. (2004). *Investigación de Operaciones*. Ciudad de México, México: Pearson Education.

La colección de ensayos ACAPOMIL tiene por objeto poner a disposición de los oficiales de Ejército y del público del área de las ciencias, textos que signifiquen un aporte a la discusión académica en temas de ciencia y tecnología para la defensa.

Se espera llenar un vacío en la cultura profesional de todos los interesados en la discusión y reflexión sobre estas materias que representan un gran desafío.

Otros Títulos de la Colección:

1. De Fantasmas y de Máquinas
2. Explosivos, Propelentes y Pirotecnia
3. Guerra Electrónica
4. SeriousGames, una alternativa para la capacitación y entrenamiento en la toma de decisiones
5. De Ciberseguridad a Ciberguerra
6. Libro Introductorio a Radares
7. Información Geoespacial: pieza fundamental en la ingeniería militar y planificación
8. Ejército Virtual: desafíos de tecnología de simulación desde el Ejército de Chile
9. Herramientas Básicas para la Función Mantenimiento: la gestión de la logística militar integrada
10. Monitoreo de la Condición Estructural
11. Explosivos y Medioambiente

El ensayo N° 12, titulado *Introducción a la Investigación Operacional*, editado por el Fondo Editorial de este Instituto y escrito por el Teniente Coronel Luis San Martín Riveros, ofrece un análisis integral de los principios fundamentales de la optimización matemática y su aplicación práctica en la resolución de problemas complejos. Este documento ha sido concebido como una guía introductoria a la disciplina, integrando aspectos teóricos y prácticos de manera equilibrada.

El texto inicia con una sólida base conceptual, abordando definiciones algebraicas y geométricas necesarias para la formulación de problemas de programación lineal. A continuación, se detallan métodos de resolución, como el gráfico y el Simplex, enfatizando su relevancia en la búsqueda de soluciones óptimas dentro de contextos reales.

Adicionalmente, se incluyen apartados dedicados al análisis de sensibilidad y la dualidad, herramientas clave para evaluar y validar la robustez de las soluciones obtenidas frente a cambios en los parámetros iniciales del problema.

En su conjunto, el ensayo no solo busca proporcionar los conocimientos técnicos necesarios para abordar problemas de optimización, sino también estimular en los lectores una comprensión más profunda de la importancia estratégica de estas herramientas en la toma de decisiones informadas y eficientes, contribuyendo al desarrollo profesional y académico de los futuros ingenieros.

